

9.7 河床変動現象の数値解析

頭首工の施工に伴う河道への影響等を検討するための手段の一つである河床変動の数値解析(以下、河床変動解析という)について解説する。なお、解説する具体的な内容は、河床変動解析において一般的に用いられている有限差分法である。

9.7.1 河床変動解析の概要

(1) 必要性

頭首工の施工に伴う河道への影響等を検討するため、設計の段階において水理模型実験が企画されることが多いことは、本章の冒頭で述べた。水理模型実験は、多くの場合、信頼性の高い結果を与えてくれる。しかしながら、結果を得るまでに多大な時間、労力、費用を要するため、実験条件を限定せざるを得ない。また、その結果を条件の異なる他の地区にそのまま適用することはできない。

一方、近年では、計算機能力の向上に伴って数値解析の技術が発展している。河床変動現象についても 5.4 河床変動の推定方法のような 1 次元解析のみではなく 2 次元解析が可能となり、平面的な洗掘や堆砂の傾向をかなり高い精度で推定できるようになってきている。数値解析の長所は、要する時間、労力、費用が水理模型実験と比べて非常に少ないことである。しかし短所として、実際には 3 次元現象である河床の変動を 2 次元にモデル化して扱うため、湾曲部の外岸側や構造物の周辺等、3 次元性の強い流れが生じる箇所における河床変動現象に対しては、相対的に推定精度が低くなる。そのため、水理模型実験と数値解析を適切に組み合わせ、頭首工の施工に伴う河道への影響等を効率よく検討することが重要である。

(2) 実施手順

河床変動解析とは、ある時刻における河道内の河床高、水深、流速等の空間分布から、微小時間経過後のそれらの空間分布を、流れと河床変動の基礎方程式を数値的に解くことによって求めるものである。長時間経過後の空間分布については、微小時間についての計算を繰り返すことにより得られる。具体的には、以下の手順で実施される。

ア 解析の対象範囲を定める。

イ 河川縦横断測量等を利用して解析の対象範囲を多数の格子に分割する。

ウ 各格子に河床高、水深、流速等の初期値を配置し、解析開始前における対象範囲のそれらの空間的な分布を表現する。その際、頭首工のエプロンや護床工等の人工構造物が存在する区間における格子については、他との識別をしておく。

エ 解析の対象範囲の上流端と下流端に、境界条件として水深、流速、流砂量等の時系列を設定する。これらの境界条件によって、既知であるウの状態(初期条件)から、頭首工の建設や改修に伴う河道への影響等を評価したい未知の状態までの間に生じると想定される洪水を表現する。

オ エの境界条件の経時変化に伴う初期値の変化を追跡する。ただし、ウで識別した格子については、構造物上では洗掘が生じないように工夫する必要がある(9.7.5(7)参照)。

9.7.2 流れの基礎方程式

流れの基礎方程式は、連続式と運動方程式から構成される。連続式は水の質量の輸送を表し、運

動方程式は水の運動量の輸送を表す。これらの式は、デカルト座標系、直交曲線座標系、極座標系、一般座標系等のうち、いずれの座標系で数値解析を行うかによって記述が異なる。

(1) デカルト座標系における基礎方程式

デカルト座標系とは、互いに直交する直線を座標軸とする座標系のことであり、直交座標系とも呼ばれる。デカルト座標系(x 、 y)における流れの連続式は式(9.7-1)、運動方程式は式(9.7-

2) 及び式(9.7-3)のように記述される。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (9.7-1)$$

$\left[\begin{matrix} h \text{ の} \\ \text{時間} \\ \text{勾配} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} M, N \text{ の} \\ \text{空間勾配} \end{matrix} \right]$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial (uM)}{\partial x} + \frac{\partial (vM)}{\partial y} = -gh \frac{\partial (z+h)}{\partial x} - \frac{\tau_x}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\overline{u'^2} h \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\overline{u'v'} h \right) \quad \dots\dots\dots (9.7-2)$$

$\left[\begin{matrix} M \text{ の} \\ \text{時間} \\ \text{勾配} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} M \text{ の対流} \\ \text{(慣性力)} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} x \text{ 軸方向の} \\ \text{水面勾配} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \text{河床面} \\ \text{からの} \\ \text{摩擦} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \text{水深平均レイノルズ応力の} \\ \text{空間勾配} \rightarrow M \text{ の拡散} \end{matrix} \right]$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial (uN)}{\partial x} + \frac{\partial (vN)}{\partial y} = -gh \frac{\partial (z+h)}{\partial y} - \frac{\tau_y}{\rho} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\overline{u'v'} h \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\overline{v'^2} h \right) \quad \dots\dots\dots (9.7-3)$$

$\left[\begin{matrix} N \text{ の} \\ \text{時間} \\ \text{勾配} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} N \text{ の対流} \\ \text{(慣性力)} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} y \text{ 軸方向の} \\ \text{水面勾配} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \text{河床面} \\ \text{からの} \\ \text{摩擦} \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} \text{水深平均レイノルズ応力の} \\ \text{空間勾配} \rightarrow N \text{ の拡散} \end{matrix} \right]$

t : 時間

z : 河床高

h : 水深

(u, v) : x, y 軸方向の水深平均流速

(M, N) : x, y 軸方向の単位幅流量 ($M = h u$ 、 $N = h v$)

ρ : 水の密度

g : 重力加速度

(τ_x, τ_y) : x, y 軸方向の底面せん断力

$$\tau_x = \frac{\rho g n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{\frac{1}{h^3}}, \quad \tau_y = \frac{\rho g n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{\frac{1}{h^3}} \quad \dots\dots\dots (9.7-4)$$

n : マニングの粗度係数

$-\overline{u'^2}$ 、 $-\overline{u'v'}$ 、 $-\overline{v'^2}$: 水深平均レイノルズ応力

$$-\overline{u'^2} = \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} k, \quad -\overline{u'v'} = \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad -\overline{v'^2} = \varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} k \quad \dots\dots\dots (9.7-5)$$

ε : 渦動粘性係数

$$\varepsilon = \frac{\kappa}{6} u_* h \quad \dots\dots\dots (9.7-6)$$

κ : カルマン定数 (=0.4)

u_* : $\sqrt{u^2 + v^2}$ に対する摩擦速度 (摩擦速度については 6.2.6 流砂量 参照)

k : 水深平均乱れエネルギー

$$k = 2.07 u_*^3 \quad \dots\dots\dots (9.7-7)$$

ここで、式(9.7-2)及び式(9.7-3)における対流とは、慣性によってそれまでの運動が継続されようとすることに相当し、拡散とは、水の粘性によって運動が均一化されようとするに相当する。これらに関する項は、対流項及び拡散項と呼ばれる。

(2) 一般座標系における代表的な基礎方程式

河川は蛇行していることが少なくない。また、河川における横断測量断面はすべてが平行ではなく、河川の湾曲に応じて流下方向とほぼ直角に設定されている。このため、デカルト座標系よりも一般座標系で数値解析を実施する方が、河岸形状の表現や計算格子の作成において有利である。デカルト座標系と一般座標系における計算格子の違いを図9.7-1に示す。

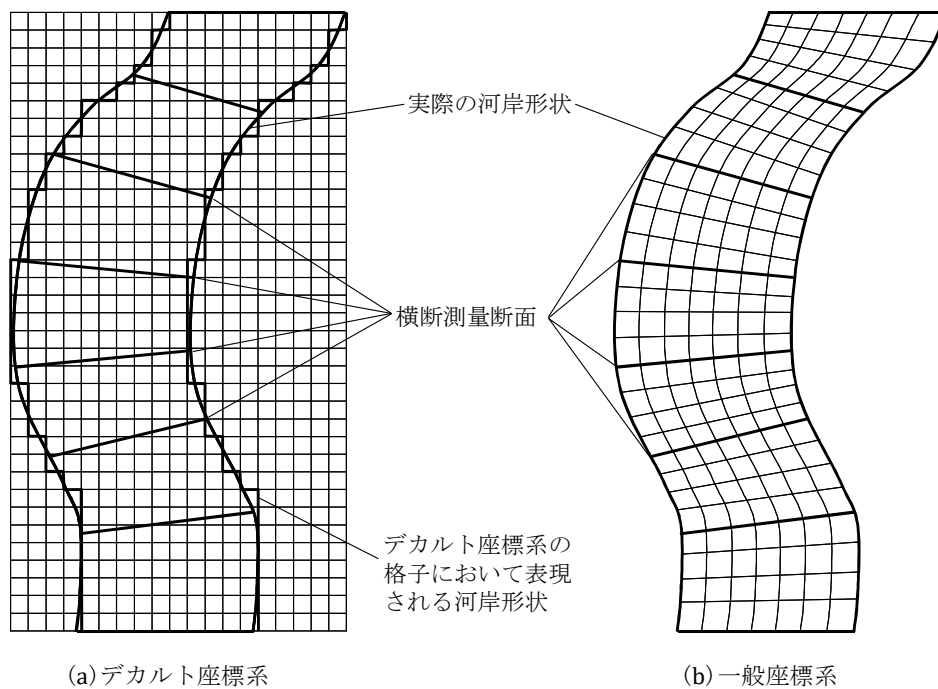


図9.7-1 デカルト座標系と一般座標系における河川の計算格子の違いのイメージ

デカルト座標系 (x, y) の基礎方程式を一般座標系 (ξ, η) に変換する場合、式(9.7-1)～(9.7-3)における x 若しくは y による偏微分(空間微分)に対して次の変換を行う。

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} \dots\dots\dots (9.7-8)$$

ここで、式(9.7-8)における各係数については、以下の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= J \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -J \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -J \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = J \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ J &= 1 / \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \dots\dots\dots (9.7-9) \end{aligned}$$

このような座標変換の結果、一般座標系 (ξ, η) における流れの連続式式(9.7-10)と運動方程式式(9.7-11)及び式(9.7-12)が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{Uh}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{Vh}{J} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (9.7-10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{M}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{UM}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{VM}{J} \right) \\ &= -gh \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial x} (z+h) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial x} (z+h) \right) \right\} - \frac{\tau_x}{J\rho} \\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial x} (-\overline{u'^2}h) \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial x} (-\overline{u'^2}h) \right\} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial y} (-\overline{u'v'h}) \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial y} (-\overline{u'v'h}) \right\} \\ &\dots\dots\dots (9.7-11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{N}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{UN}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{VN}{J} \right) \\ &= -gh \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial y} (z+h) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial y} (z+h) \right) \right\} - \frac{\tau_y}{J\rho} \\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial x} (-\overline{u'v'h}) \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial x} (-\overline{u'v'h}) \right\} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial y} (-\overline{v'^2}h) \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial y} (-\overline{v'^2}h) \right\} \\ &\dots\dots\dots (9.7-12) \end{aligned}$$

ここで、水深平均レイノルズ応力は次式で求められる。

$$\begin{aligned} -\overline{u'^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\varepsilon \frac{\partial \xi}{\partial x} u \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial x} u \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\varepsilon \frac{\partial \xi}{\partial x} u \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial x} u \right) - \frac{2}{3} k \\ -\overline{u'v'} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\varepsilon \frac{\partial \xi}{\partial y} u \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial y} u \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\varepsilon \frac{\partial \xi}{\partial x} v \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial x} v \right) \quad \dots\dots\dots (9.7-13) \\ -\overline{v'^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\varepsilon \frac{\partial \xi}{\partial y} v \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial y} v \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\varepsilon \frac{\partial \xi}{\partial y} v \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial y} v \right) - \frac{2}{3} k \end{aligned}$$

式(9.7-11)及び式(9.7-12)における対流項で対流速度として用いられている(U 、 V)は、 ξ 、 η 軸方向の水深平均流速の反変成分であり、 x 、 y 軸方向の水深平均流速(u 、 v)から次のように変換される。

$$U = \frac{\partial \xi}{\partial x} u + \frac{\partial \xi}{\partial y} v \quad , \quad V = \frac{\partial \eta}{\partial x} u + \frac{\partial \eta}{\partial y} v \quad \dots\dots\dots (9.7-14)$$

先に、一般座標系における基礎方程式を用いる場合の長所を述べた。一方、短所として、式(9.7-11)～(9.7-14)のように基礎式に含まれる項の数がデカルト座標系よりも大幅に増え、その差分計算が煩雑になる。また、一般座標系の数値解析の精度は、同じ格子の大きさであってもデカルト座標系よりも低いものであり、さらに、隣り合う格子同士の曲がり(図-9.7-1参照)の角度が大きくなるにつれて低下するため、格子の作成に当たっては十分な注意が必要となる(9.7.5(3)参照)。

(3) 一般座標系における他の基礎方程式

9.7.2(2)では、一般座標系における運動方程式として、 Δt 経過後の値を求めるべき変数(以下、未知変数)をデカルト座標系における物理成分 M 、 N とし、対流項における対流速度には一般座標系における反変成分 U 、 V を使用する式(9.7-11)及び式(9.7-12)を紹介した。座標変換の

基本である式(9.7-8)及び式(9.7-14)に単純に従って得られたこの型式は、流体力学に関する数値解析を専門とする数値流体力学の分野では、一般座標系における運動方程式として代表的なものである。この型式では、水の質量と運動量の保存性が高い数値解析を行えることが確認されている。

一方、河川工学の分野では、9.7.2(2)の型式の他にも様々なものを使用されている。それらのうち比較的多く用いられているものを、9.7.2(2)の型式とともに、表-9.7-1に概要を整理した。これら各型式の使い分けについては、学識経験者に相談することが望ましい。

表-9.7-1 一般座標系における流れの運動方程式

	未知変数 デカルト座標系物理成分 対流速度 一般座標系反変成分	未知変数 一般座標系反変成分 対流速度 一般座標系反変成分	未知変数 一般座標系反変成分 対流速度 一般座標系反変成分	未知変数 一般座標系反変物理成分 対流速度 一般座標系反変物理成分
導出方法	・式(9.7-2)、式(9.7-3)における空間微分に対して、式(9.7-8)による座標変換を行う。対流速度は式(9.7-14)により変換する。得られるのは、式(9.7-11)、式(9.7-12)である。	・第1式は、式(9.7-11)に$\partial\xi/\partial x$を乗じたものと、式(9.7-12)に$\partial\xi/\partial y$を乗じたものを加えて得られる。 ・第2式は、式(9.7-11)に$\partial\eta/\partial x$を乗じたものと、式(9.7-12)に$\partial\eta/\partial y$を乗じたものを加えて得られる。 ・すべての速度は式(9.7-14)により一般座標反変成分に変換する。 ・単位幅流量についても、式(9.7-14)と同様の手順で一般座標反変成分に変換する。	・第1式は、式(9.7-2)に$\partial\xi/\partial x$、式(9.7-3)に$\partial\xi/\partial y$を乗じ、両式を加えて得られる。 ・第2式は、式(9.7-2)に$\partial\eta/\partial x$、式(9.7-3)に$\partial\eta/\partial y$を乗じ、両式を加えて得られる。 ・すべての速度は式(9.7-14)により一般座標反変成分に変換する。 ・単位幅流量についても、式(9.7-14)と同様の手順で一般座標反変成分に変換する。	・$\partial\xi/\partial x$、$\partial\xi/\partial y$、$\partial\eta/\partial x$、$\partial\eta/\partial y$を単位反変ベクトルを用いて無次元化して$\partial\tilde{\xi}/\partial x$、$\partial\tilde{\xi}/\partial y$、$\partial\tilde{\eta}/\partial x$、$\partial\tilde{\eta}/\partial y$を得る。 ・第1式は、式(9.7-2)に$\partial\tilde{\xi}/\partial x$、式(9.7-3)に$\partial\tilde{\xi}/\partial y$を乗じ、両式を加えて得られる。 ・第2式は、式(9.7-2)に$\partial\tilde{\eta}/\partial x$、式(9.7-3)に$\partial\tilde{\eta}/\partial y$を乗じ、両式を加えて得られる。 ・一般座標系反変物理成分は、式(9.7-14)において係数を上記の無次元化したものに置き換えて得られるものである。
特徴	・座標変換の基本的に単純に従って得られる型式である。 ・水の質量と運動量の保存性が高い数値解析を行えることが確認されている。 ・河川工学の分野では、近年はこの型式が用いられることが少ない。	・座標変換の方法は独自のものである。 ・この型式における変数配置では、河岸侵食等による計算格子の変形に対応しやすい。 ・本型式における項数は、式(9.7-11)、式(9.7-12)の倍程度となる。	・座標変換の方法は独自のものである。 ・対流項に対してCIP法を適用しやすい型式である。 ・CIP法は他の方法よりも精度は高いが、計算は複雑である。 ・本型式における項数は、式(9.7-11)、式(9.7-12)の倍程度となる。	・座標変換の方法は独自のものである。 ・一般座標系の成分のみで表示する場合は、他の型式よりも境界条件の設定が容易になる。 ・本型式における項数は、式(9.7-11)、式(9.7-12)の倍程度となる。
代表的な事例	・清水ら(1991) ・川島・福岡(1995)	・長田(2001) ・竹林(2005)	・伊東・清水(2003)	・渡邊ら(2002)

(注) 反変物理成分とは、反変成分は長さの単位が計算格子の幅で無次元化されているのに対し、これを物理空間の次元に戻したものである。

9.7.3 デカルト座標系における流れの基礎方程式の数値解析方法

ここでは、デカルト座標系における流れの基礎方程式に対する数値解析の方法を紹介する。一般座標系における基礎方程式に対して数値解析を行う場合には、デカルト座標系の方法に対して、変数の配置方法、対流速度の設定方法、差分の考え方等においていくらかの追加と変更を行う必要があるが、原理的には変わらない。

(1) 変数の配置

デカルト座標系では、河床の標高 z 、水深 h 、流速 u 及び v 、単位幅流量 M 及び N を計算格子において図-9.7-2のようにスタガード配置させることが、従来より一般的である。このような配置は、水の質量と運動量の保存性が高い数値解析を行う上で非常に有利である。

また、式(9.7-1)～(9.7-3)に対して数値解析を行う際には、未知変数、すなわち、各式において t による偏微分項すなわち時間勾配項で対象とされる変数を中心とし、大きさが $\Delta x \times \Delta y$ のコントロールボリューム(検査区間ともいう)を考え(図-9.7-2)、このコントロールボリュームに基づいて差分計算を行う。

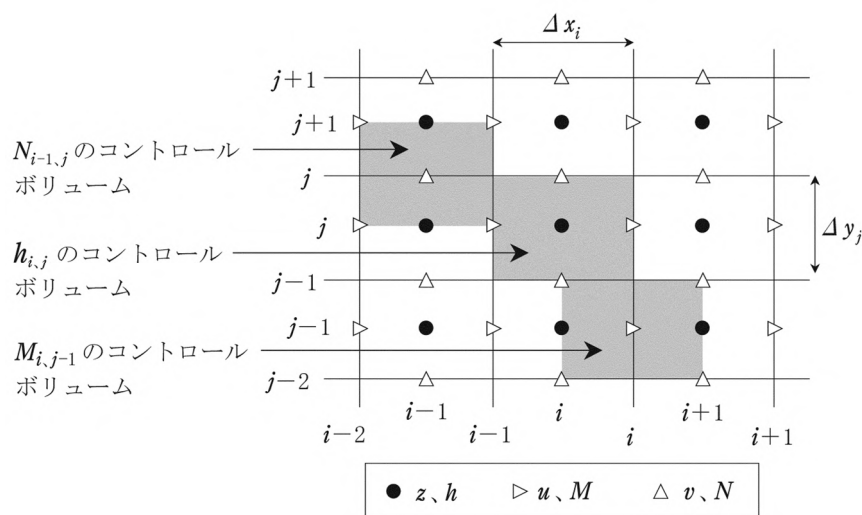


図-9.7-2 デカルト座標系における変数のスタガード配置とそのコントロールボリューム

(2) 時間差分

式(9.7-1)～(9.7-3)における時間勾配項に対する数値解析(以下、時間差分)のうち、最も簡単な手法はオイラー陽解法である。この手法を用いた場合、式(9.7-1)は次式のようにになる。

$$h_{i,j}^{n+1} = h_{i,j}^n - \Delta t \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) \dots\dots\dots (9.7-15)$$

より高い精度が必要な場合は、クランク-ニコルソン法、ルンゲ-クッタ法、アダムス-バッシュホース法等が用いられることもある。時間差分に用いられるこれらの数値解析方法の詳細については、専門書等を参照されたい。

(3) 対流項を除く空間差分

式 (9.7-1)～(9.7-3)における x 若しくは y による偏微分項すなわち空間勾配項のうち、対流項を除いた項に対する数値解析（以下、空間差分）では、図-9.7-3におけるコントロールボリュームの上下左右で差分をとる。例えば、 θ を中心とするコントロールボリュームにおいて α の空間差分を考える場合、図-9.7-3のように計算する。ここで、コントロールボリュームの上下左右の端に α が存在しない場合、図-9.7-4のように周辺から単純平均によって補間する。

2 階微分が含まれる拡散項では、まず上下左右の端を中心として差分をとる（図-9.7-5(a)）、次にそれらの値を用いてコントロールボリュームの中心で差分をとる（図-9.7-5(b)）ことになる。

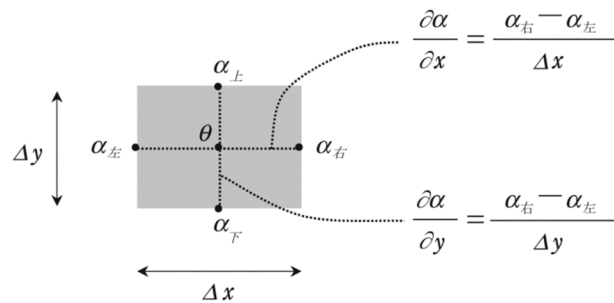
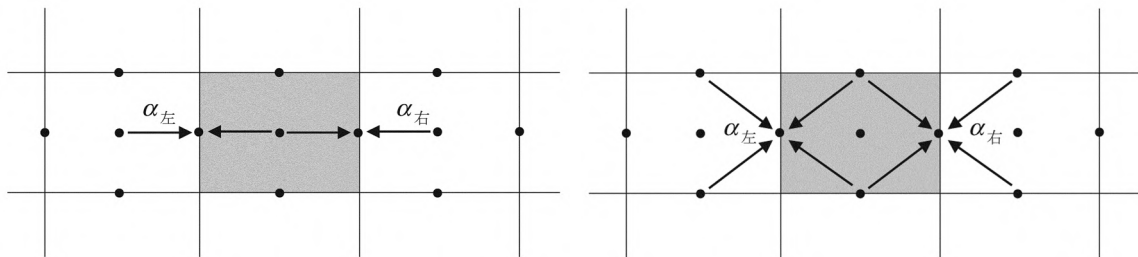


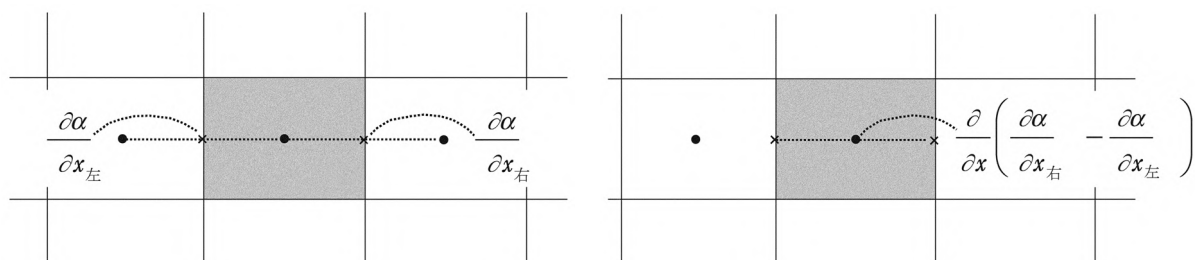
図-9.7-3 コントロールボリュームと空間差分



(a) 2 点の平均をとる例

(b) 4 点の平均をとる例

図-9.7-4 コントロールボリュームの左右で差分をとる際の周辺からの補間



(a) 左右端を中心とした差分

(b) 中心での差分

図-9.7-5 二階微分に対する差分の例

(4) 対流項の差分

式 (9.7-2) 及び式 (9.7-3) における対流項の差分計算では、コントロールボリュームの上下左右の端で、対流速度 u 、 v については図-9.7-4(a)のように近傍の2点の平均をとる。一方、輸送さ

れる M 、 N については同様の平均をとる（2次精度中心差分）と、計算が不安定になる場合がある。このような場合は、中心差分ではなく上流差分が行われる。比較的簡単な上流差分として、図-9.7-6(a)のように近傍2点のうち上流側の1点の値を用いる方法（1次精度上流差分）や、図-9.7-6(b)のように近傍の2点に上流側の1点を加えた3点に2次曲線をあてはめて内挿する方法（QUICK）等がある。対流項の差分に用いられるこれらの数値解析方法の詳細については、専門書等を参照されたい。

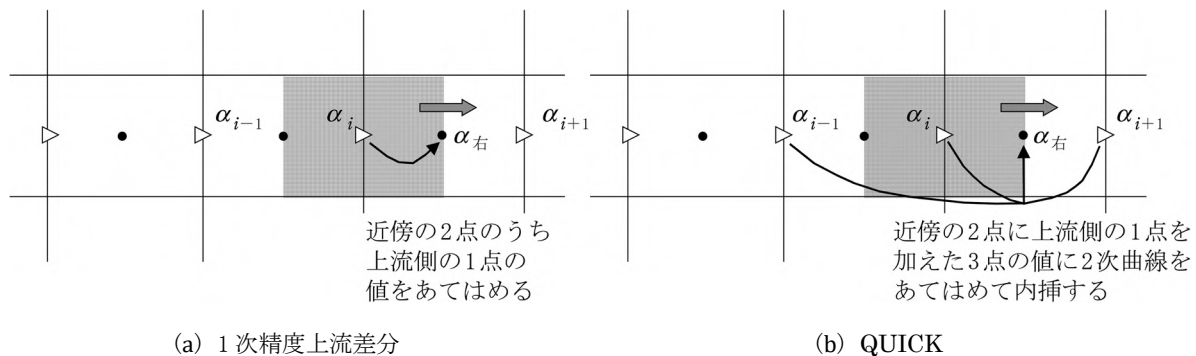


図-9.7-6 対流項の空間差分

(5) 1次元移流方程式の数値解析結果

9.7.3(4)で説明した対流項の数値解析方法の違いが結果に及ぼす影響を、1次元移流方程式を例として紹介する。ここで、移流方程式とは式(9.7-16)によって定義される。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + c \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (9.7-16)$$

θ : 輸送される物理量

c : θ の対流速度（定数）

式(9.7-16)は、ある物理量 θ の x 軸方向の空間分布が、形を変えずに一定速度 c で移動する現象を表す。

θ を $0 < x < 1$ に分布する余弦波と矩形波とし、この範囲で θ の波形を周回させた場合について、数値解析で再現計算を行った結果が図-9.7-7である。厳密解ではどれだけ周回させても初期値と同じ波形になるのに対し、二次精度中心差分による解析結果では、余弦波の場合は位相のずれが生じており、矩形波の場合は移動の過程で非物理的な振動が生じている。これらの位相のずれや振動は時間の周回数の増加とともに大きくなり、解析結果は非常に不安定な状態である。一次精度上流差分による解析結果では、このような位相のずれや振動は生じておらず、解析結果の安定性は高いが、周回数の増加とともに θ の分布が平滑化されている。QUICK による解析結果では、初期値の波形が比較的保存されており、ここで用いた3手法の中ではQUICKが最も再現精度の高い方法である。

なお、数値解析結果の再現精度については、扱う物理量の分布形状や、計算格子の密度にも影響される。このため、ここで比較した差分の方法を用いれば、常に図-9.7-7と同程度の精度の解析結果が得られるわけではない。

また、TVD スキームや CIP 法等を用いれば、QUICK より再現精度の高い解析結果が得られるが、一方で差分計算が複雑となる。これらの数値解析方法の詳細については、専門書等を参照されたい。

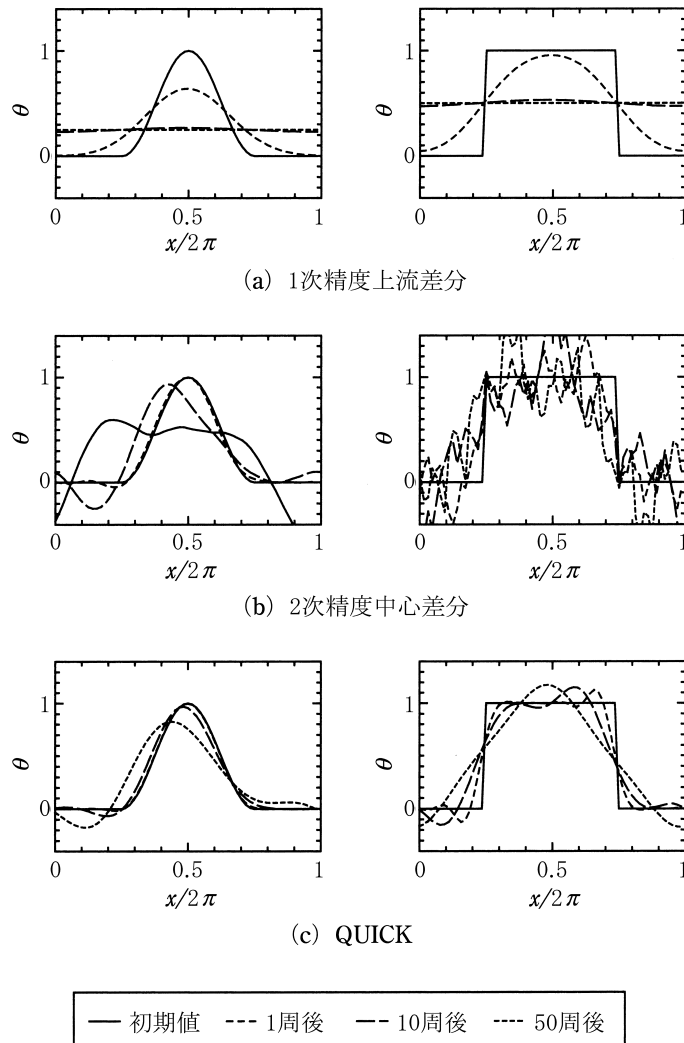


図-9.7-7 空間差分の方法の違いと移流方程式の数値解析結果

9.7.4 河床変動の基礎方程式

(1) 土砂の輸送形態

流れによって輸送される土砂は、6.2.6 流砂量で述べたように、その輸送形態によって掃流砂と浮遊砂に分類される。このうち掃流砂とは、比較的大きい粒径の土砂により構成され、河床と間断なく接触し、転動、滑動、小跳躍の繰り返しによって移動するものである（図-9.7-8）。浮遊砂とは、比較的小さい粒径の土砂により構成され、水流の乱れによる拡散の影響を受けて移動するものである（図-9.7-8）。ただし、両者とも水と土砂が混合して流れている現象であることには変わりなく、これらの区別は取り扱いの簡便さから行われている。

9.6 水理模型実験事例のように、頭首工周辺の河床変動現象では主に掃流砂の影響のみが問題となることが多い。このため、以降では掃流砂のみを扱うこととする。

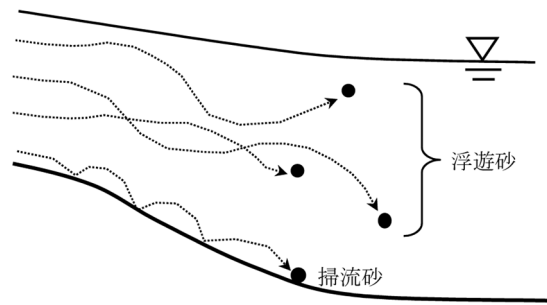


図-9.7-8 掃流砂と浮遊砂の輸送形態の違いのイメージ

(2) 2次元の掃流砂量の式

河床変動を1次現象として扱う場合は、6.2.6 流砂量で紹介した掃流砂量（単位幅・単位時間当たりの体積[m³/s]）の算出式 式(6.2-8)～(6.2-10)を、5.4 河床変動の推定方法のようにx軸方向にそのまま適用すればよい。

一方、本節で説明している2次元の河床変動計算では、式(6.2-8)～(6.2-10)をx、y軸それぞれの方にそのまま適用するだけではなく、2次流の影響を考慮するための流砂量の式も用いられる場合が多い。この場合は、流線方向（s軸方向）（図-9.7-9）の流砂量 q_{Bs} を式(6.2-8)～(6.2-10）から求め、s軸と直交する方向（n軸方向）（図-9.7-9）の流砂量 q_{Bn} を式(9.7-17）の長谷川の式等から算出する。

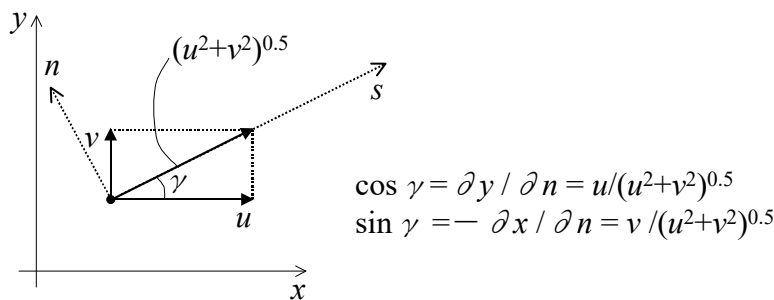


図-9.7-9 x、y軸方向とs、n軸方向の関係のイメージ

$$q_{Bn} = q_{Bs} \left(-N_* \frac{h}{r} - \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\mu_s \mu_k \tau_*}} \frac{\partial z}{\partial n} \right) \dots \dots \dots (9.7-17)$$

N_* : 係数 ($N_* = 7.0$ とすることが多い)

R : 流線の曲率半径（下記の式については竹林（2005）参照）

$$\frac{1}{r} = \frac{u \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + v \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right)}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \dots \dots \dots (9.7-18)$$

τ_{*c} : 無次元限界掃流力（6.2.6 流砂量参照）

τ_* : 無次元掃流力（6.2.6 流砂量参照）

μ_s : 河床材料の静止摩擦係数 ($\mu_s = 1.0$ とすることが多い)

μ_k : 河床材料の動摩擦係数 ($\mu_k = 0.45$ とすることが多い)

$\frac{\partial z}{\partial n}$: 河床標高の n 軸方向の勾配 (下記の式については図-9.7-9 参照)

$$\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} = -\frac{\partial z}{\partial x} \sin \gamma + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \gamma \quad \dots\dots\dots (9.7-19)$$

s 、 n 軸方向の流砂量 (q_{Bs} 、 q_{Bn}) からデカルト座標系 x 、 y 軸方向の流砂量 (q_{Bx} 、 q_{By}) 及び一般座標系 ξ 、 η 軸方向の流砂量 (q_B^ξ 、 q_B^η) を算出する手順は下記のようなになる。

$$q_{Bx} = q_{Bs} \cos \gamma - q_{Bn} \sin \gamma, \quad q_{By} = q_{Bs} \sin \gamma + q_{Bn} \cos \gamma \quad \dots\dots\dots (9.7-20)$$

$$q_B^\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} q_{Bx} + \frac{\partial \xi}{\partial y} q_{By}, \quad q_B^\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} q_{Bx} + \frac{\partial \eta}{\partial y} q_{By} \quad \dots\dots\dots (9.7-21)$$

なお、6.2.6 流砂量及びここで紹介した掃流砂量の式は、いずれも平衡状態を仮定したものであり、また、水路実験から得られたデータをもとに作成されたものである。そのため、これらを非平衡状態となる洪水時の河床変動に対して用いる場合は、可能な限り現地で流砂量の観測を行い、対象とする河川における適合性を確認することが必要である。

(3) 2次元の流砂の連続式

デカルト座標系における2次元の河床変動計算では、式(9.7-20)で得られる流砂量を式(9.7-22)の流砂の連続式に代入して行う。

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{\partial q_{Bx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{By}}{\partial y} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (9.7-22)$$

λ : 河床材料の空隙率

数値解析を実施する際の q_{Bx} 、 q_{By} の配置は、それぞれ図-9.7-2における u 、 v と同じ位置とする。

一般座標系における2次元の河床変動計算では、式(9.7-21)で得られる流砂量を式(9.7-23)の流砂の連続式に代入して行う。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{z}{J} \right) + \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{q_B^\xi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{q_B^\eta}{J} \right) \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (9.7-23)$$

9.7.5 河床変動解析を実施する際の検討事項

(1) 必要な資料

河床変動解析を実施する場合に必要な資料は、基本的に水理模型実験(表-9.3-1)と同じである。このうち航空写真については、可能な限り古いものも含めて収集し、今後の河床変動を知りたい箇所における砂州やミオ筋のこれまでの変化を把握しておくことが必要である。河床変動解析では、使用した数値解析手法や、後述する解析範囲、計算格子、境界条件等が不適切であっても、何らかの結果が得られるため、解析結果の妥当性の検討は必須である。その際に、過去の航空写真から得られる情報は非常に有用となる。

(2) 解析範囲

解析範囲の上流端としては、河床の変動があまり生じず、平衡状態を仮定した流砂量の式を適用しても支障がないとみなせる地点を選ぶべきである。加えて、上流端では河川の水深と流量を与える必要もあるため、水位が観測されており、かつ、水位と流量の関係を推定できる地点である必要もある。これらの条件を満たす地点を上流端として選出することになるが、この位置で設定する境界条件（後述 9.7.5(6)参照）は必ずしも実際の現象を忠実に表すことができるわけではないことから、その違いを緩和するため、可能な限り、河床の変動を着目している範囲（以下、検証範囲）から離れた位置とする方がよい。

下流端も、上流端と同様に水位が観測されており、かつ、水位と流量の関係を推定できる地点である必要があるが、上流端ほど検証範囲から離れた位置とすることを重視する必要はない。

(3) 計算格子

計算格子は、図-9.7-1のように河川縦横断測量の結果（表-9.3-1）を補間して計算格子を作成する。各格子は、デカルト座標系（ x 、 y ）における位置と、河床の標高に関するデータを有することになる。

前述の測量結果に対する補間は、等間隔若しくは等比間隔で点を追加する等、機械的に行わざるを得ないため、実際の地形を高い精度で再現できない。また、そのような計算格子の使用によって、解析結果には新たな誤差が生じる。そのため、一般的には計算格子は密である方が解析結果の精度は高くなるが、河床変動解析ではある一定以上細かい計算格子としても解析結果の精度は向上せず、計算時間が増大するだけとなる。計算格子の大きさの目安としては、河川幅、河川の蛇行形状、横断測量の間隔等にもよるが、50～200 m の範囲でとられることが多い。

なお、9.7.2(2)で述べたように、一般座標系であっても、隣り合う格子同士の曲がり（図-9.7-1 参照）の角度は可能な限り小さくなるように作成する必要がある。計算格子の作成に当たっては学識経験者に相談することが望ましい。

(4) 粗度係数

流れが河床から受ける抵抗の影響は式（9.7-4）によって評価されるが、この式では粗度係数が用いられる。この粗度係数としては、実測値があればそれを利用できるが、通常はないことが多い。このような場合には、現地の河床材料の粒径（表-9.3-1）から粗度係数の第一次近似値を推定し、既往洪水の再現計算を行いながらその値を微調整する。第一次近似値の推定には、各種の水理学のテキストを参照されたい。

(5) 初期条件

各格子における河床の標高の初期値の設定に当たり、現状に対する将来予測を行う場合は、9.7.5(3)で計算格子を作成する際に、直近の河川縦横断測量の結果をそのまま用いればよい。頭首工の施工若しくは改修による影響を評価する場合は、直近の河川縦横断測量の結果の一部を施工若しくは改修後のデータに置き換えて用いればよい。

各格子における水深の初期値については平水時の平均的な値を与え、流速及び流量の初期値についてはゼロとする場合が多い。しかし、これらについては明確な決まりはないため、設定に当たっては学識経験者に相談することが望ましい。

(6) 境界条件

初期条件の時点から、頭首工の建設若しくは改修に伴う河道への影響等を評価したい時点までの

期間に発生すると考えられる洪水を、境界条件として解析範囲の上下流端で発生させる。その際、既往最大洪水等、単一の洪水のみを発生させる場合や、河床材料が輸送され始めるときの洪水より規模の大きな過去の洪水で、各種データが観測されているものすべてを発生させる場合がある。ここで、河床材料が輸送され始めるときの洪水としては、平均年最大洪水が用いられることが多いが、河床材料の粒径や洪水特性によってその規模が異なるので、その選定には十分な注意が必要である。また、どのような洪水を対象とするかについても同様であり、学識経験者に相談することが望ましい。

解析範囲の上下流端の計算格子に与える水深、流量については、過去の観測データがあればそれを利用し、なければ解析対象範囲に対する一次元不等流解析（5.4 河床変動の推定方法）の結果を利用する。流砂量に関しては、6.2.6 流砂量及び9.7.4(2)で紹介した掃流砂量の式を用いて、境界条件として設定した水深と流量に応じた値を算出する。

(7) その他の注意事項

頭首工周辺の河床変動現象を数値解析によって評価する場合、頭首工のエプロン、護床工等の人工構造物が存在しない区間に対しては、本節で説明した河床変動解析をそのまま適用できる。一方、これら人工構造物が存在する区間に対しては、構造物上では洗掘が生じないように、堆砂の有無や量により場合分けして、流砂量（式（6.2-8）～（6.2-10）、式（9.7-17））を計算する必要がある。

また、実際は3次元現象である河床の変動を2次元にモデル化して扱うため、9.7.1(1)で述べたように、3次元性の強い流れが生じる箇所における河床変動現象に対しては推定精度が低くなる。そのため、河床変動解析は、水理模型実験におけるケース数の絞り込み等のための予備検討に用い、最終的な検討には水理模型実験を実施するのが望ましい。

9.7.6 河床変動解析の事例

多摩川の二ヶ領宿河原堰は、昭和24年に建設された際には幅約310 mのうち約270 mが固定堰であったが、平成11年に全面可動堰に改築された。このような改築が行われると、固定堰の上流側に堆積していた土砂が堰下流へ流出する河床変動が生じることが予想される。このような現象を把握することは、堰及び河道を維持管理する上で重要である。そのため、宿河原堰周辺の河床の横断測量が改築後に定期的に行われている。一方、測量は現状を把握する上で重要な手段であるが、それとは別に、固定堰の可動堰化が河床に及ぼす影響を事前に予測できれば、頭首工の建設位置の変更や、9.6 水理模型実験事例で紹介した事例のような付帯構造物の設置等、適切な対処が可能となる。そこで、これまでの測量結果に対する河床変動解析の再現計算が行われ、本解析の将来予測としての適用の可能性が検討された。

再現計算を行う期間は、平成11年2月（新堰竣工直後）から平成14年3月とされた。解析範囲（9.7.5(2)）は写真-9.7-1のように設定され、初期条件（9.7.5(5)）として平成11年2月の河床形状が与えられた。境界条件（9.7.5(6)）には、前述の期間のうち、解析範囲における河床材料の平均粒径がほぼ全体で移動し始める流量を超える洪水（平成11年8月の洪水と平成13年9月の洪水）が与えられた。

前述の期間における河床標高の変化量の測量結果を図-9.7-10、河床変動解析の結果を図-9.7-11に示す。これらの比較より、河床変動解析の結果は堰周辺の洗掘や堆積の傾向をおおむね再現しているといえる。堰上流24.0 km地点までの河床変動量の実測値は-59 千 m³、解析値は-66 千 m³で

あり、河床変動解析は河床の将来的な変動を予測する手法として期待できる。ただし、堰下流では広く露出する固結シルト層により砂州の浸食が抑制されていたこと等については十分に再現されておらず、今後、解析精度を向上させる余地も残されている。



写真-9.7-1 解析範囲(国土地理院ホームページ
(<http://mapbrowse.gsi.go.jp/airphoto/>)から引用)
(注) 上流端及び下流端はおよその位置である

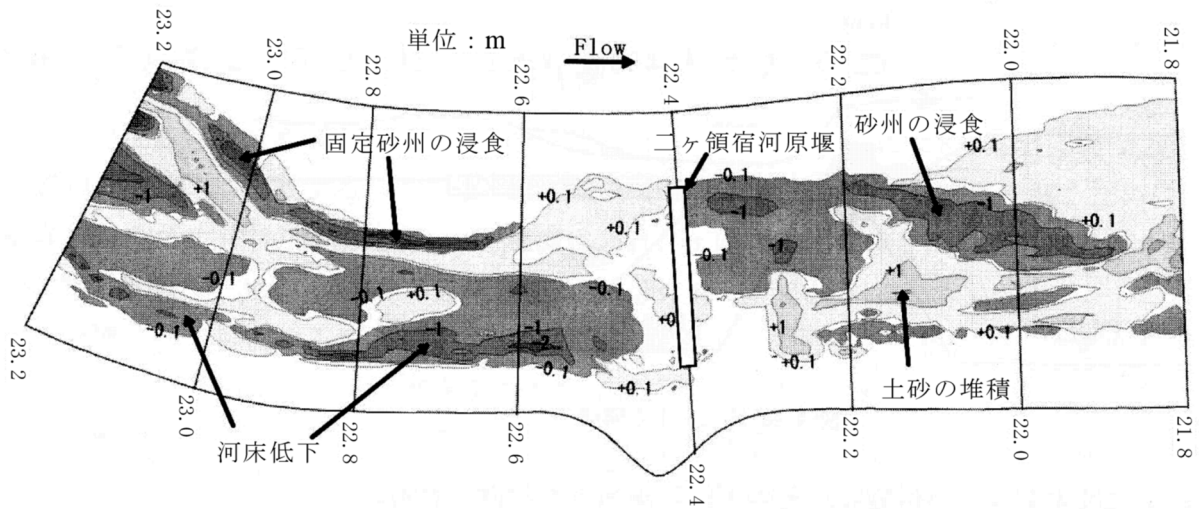


図-9.7-10 平成11年2月から平成14年3月における河床変動量の実測値
(福岡(2005)から引用)

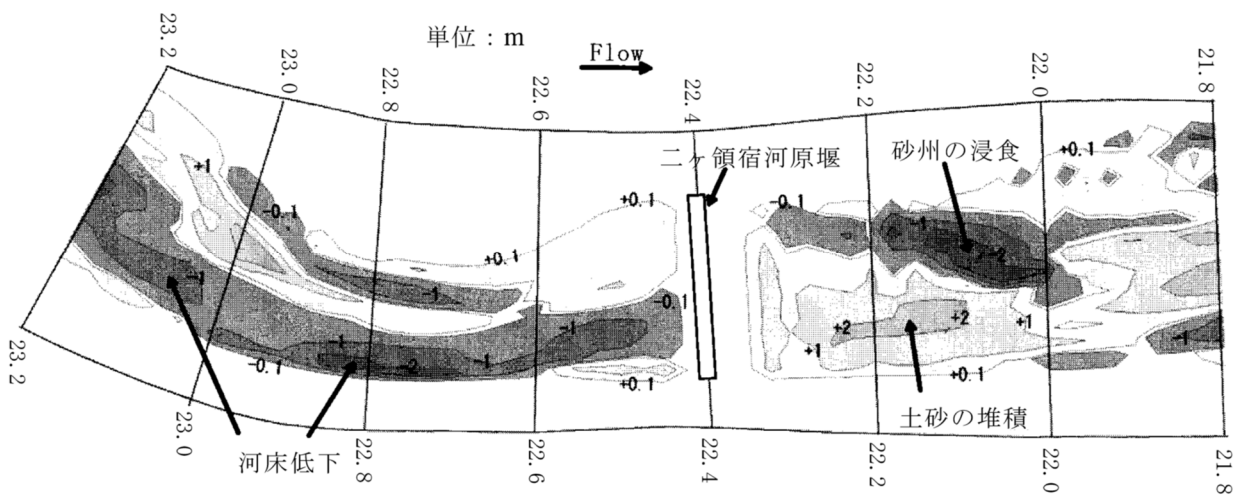


図-9.7-11 平成11年2月から平成14年3月における河床変動量の解析値
(福岡(2005)から引用)