回帰分析に於けるビーンの図式解法について

三枝義清

1　ビーン（Louis. H. Bean）の重回帰分析に関する図式解法が発表されたのは一九二九年で、〔I〕その後農業経済の分野では特に、汎く利用されてきたようである。この図式解法の紹介はペネット（Pearson and Bennet）やシェファード（G.S. Shepherd）〔II〕には詳細にわたつて、述べられてゐるが、最近の統計書では触れられていない。

一九三〇年以後この方法が実際に利用される機会が多くなるに従つて、図式解法の信頼性やその得失、或いは最小二乗法による数値的な解法（図式解法に対して数式解法と呼ばれている）との比較等、図式解法をめぐつて論争が多く見られた。此の辺の文献については稿末の文献〔I〕に詳しい。私自身此の図式解法に興味をもつていたわけではないが、昨年農業観測研究部会（統計研究会）で中山氏がビーンの方法を紹介されてから、〔IV〕この部会でも矢張り、この方法をめぐつて議論があつた。

これらの論議の原因には、いろいろのものが挙げられようが、その一半は、図式解法の基づく基礎原理が、或いは図式解法で行う諸操作のメカニズムが、数学的に明確に定式化されていなかつたことが大いに原因していると思う。

この点、シェファードやベネットの説明はいずれも、直観的な叙述的表現によつていて、不充分である。私は限定的に直線回帰の場合についてではあるが、図式解法の基づく数学的な原理、並びに数式解法との関聯を農業観測研究部会で報告させていただいた。その後最近に至つて、矢張り同じような内容をもつた文献としてフート(R. J. Foote)[Ⅲ]のものが発表されたので、此の文献の結果にも触れながら、図式解法の基礎原理について明らかにしたいと思う。取り扱わねばならぬ問題は多いが、茲では数式解法との関聯に注目したい。

2　重回帰の図式解法といつても、茲で述べるビーンの方法が唯一のものではない。たとえば次の方法もよく使われる。

簡単に取り扱う変数を三変数としてX_1を従属変数、X_2、X_3をそれぞれ独立変数とせば、

(イ)　撒布図(X_1, X_2)並びに(X_3, X_2)を作り、それぞれに回帰線をフィットする。$\bar{X}_1$をそれぞれの変数の平均と表わして、$x_1=X_1-\bar{X}_1$ とおけば各図上の回帰線は

$$x_1=b_{12}x_2+e_1,\quad x_3=b_{32}x_2+e_2 \quad \cdots\cdots (2.1)$$

で表わされる。

(ロ)　次に(イ)でフィットした直線からの残差 e_1, e_2 を求めて撒布図 (scatter diagram) (e_1, e_2) を作り、これに回帰線をフィットする。これを

$$e_1=b_{13\cdot2}e+e_3$$

で表わす。(2.1)式を用いてこの方程式を書き改めれば

$$x_1 = b_{12\cdot3}x_2 + b_{13\cdot2}x_3 + e_3 \quad (b_{12\cdot3} \equiv b_{12} - b_{13\cdot2} \cdot b_{32}) \cdots\cdots\cdots\cdots (2.2)$$

がえられる。若し、(イ)及び(ロ)で求めた直線が正確に最小二乗法の原理を満足して引かれておれば(2.2)式で求められている$b_{12\cdot3}$や$b_{13\cdot2}$等は、最小自乗法によつて数式解法で定められる偏回帰係数と必らず一致する。三変数以上の場合でも、同じ要領でもつて多段のフイットを分解して行うことによりそれぞれの偏回帰係数を求めることが出来る。従つて、変数間に直線的な回帰線をフイットしようとするのであれば、この図式解法は使えるわけであるが、欠点として直線的な場合に限定されることの他に、各図上でのフィットがもし不正確なものであつたとすれば、その影響は修正されずに、結果に直接反映されてきてしまう。

これに対してビーンの方法は次の如き利点をもつている。[I]

(イ)回帰関係が直線であることに限定されない。而も数式解法の如く、フィットすべき回線の型を事前に指定しておく必要がなく、データに即して、修正してゆくと云う弾力性をもつている。

(ロ)最初のカーブ・フイッティングに於けるエラーはフィットを反復繰返すことによつて、除去してゆくことが可能である。

(イ)の点は重要である。ビーンの方法が発展された動機はこの点にあつた。然し、玆で主として問題にしようとする点、図式解法の基礎原理、並びに数式解法との関聯、を論ずる為には直線回帰の場合に限つておくのが簡便である。結果は限定的になるけれども、問題の過半は明らかにすることが出来ると思う。従つて(イ)の意味では数式解法と同じく、非弾力的な図式解法を論ずることになるわけである。更にとり扱う変数は主として三変数の場合に限つたが、これは便宜的にであつて、より多変数への場合への拡張は類推しえよう。

数式解法との関聯を論ずるに当つて特に留意すべきことは、図式解法からは、偏回帰係数のみならず、重相関係数、偏相関係数、等についても求められうるが、それぞれ別個に分けて考察する必要のあることである。数式解法でえられる数値との関係が同一でなく、以下示めす如くそれぞれ異つた様相を示めすからである。

偏回帰係数について。

3　図式解法に於ける逐次近似について。

先ずベネットで述べられている手続きを基にして図式解法の骨子を要約してみる。より多変数についても同様だから、簡単に三変数の場合にして、X_1を従属変数、X_2、X_3をそれぞれ独立変数とする。茲に云うところの従属変数、独立変数の意味は形式的なものであつて、図上で縦軸に表現されるのが従属変数、横軸にとられるのが独立変数であるというに過ぎない。これらの変数についてn個の観測値がえられたものとする。

(3・1)　逐次フィットしてゆく曲線は直線であるとする。

(3・2)　ビーンの図式解法は手続きとして、茲で述べる逐次近似の操作と、第一次近似の際に特に用いられるビーン法（Bean's guide）と呼ばれる操作（7で後述する）とに分けて考えるのが便利である。茲では先ず前者だけに注目する。即ち後者の操作を用いなかつた時の図式解法を先ず最初に論ずることにする。図式解法でとつている逐次近似の方法の根拠が明らかにされれば、ビーン法の意味も自づから瞭然とされるからである。

(3・3)　変数をフィットしてゆく順序はX_2、X_3の順とする。

(3・4)　以下の説明中に現われて来る記号を茲で集約しておく。

$$\bar{X}_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}$$ （変量X_iの算術平均）

$$x_i=X_i-\bar{X}_i$$ （変量X_iの各観測値の平均からの偏差）

$$a_{ii}=\sum_{j=1}^{n}x^2_{ij},\quad a_{ik}=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\cdot x_{kj}\quad (i\neq k)$$

$$a_{ii}=s_i^2\quad a_{ik}=s_is_kr_{ik}$$

更に各図上にフィットされる直線はすべて、最小二乗法による回帰線（least square line）であるが、簡単にL.S.L或いは単に$L(X_2)$，$L(X_3)$で表すことにする。これは独立変数X_2或いはX_3に対する単純（simple）な回帰線を表している。又撒布図は$ch(X_1, X_2)$と略記するがこれは縦軸にX_1横軸にX_2をとつて作られた撒布図を意味している。

これらの条件の下では図式解法は次の如く要約できる。

(イ) 先づ$ch(X_1, X_2)$を作り、これにL.S.L, $L^{(1)}(X_2)$をフィットする（第一図と呼ぶことにする）。

(ロ) 第一図に於いて残差；$e_1^{(1)}=X_1-L^{(1)}(X_2)$を求めて、$ch(e_1^{(1)}, X_3)$を作り、これにL.S.L, $L^{(1)}(X_3)$をフィットする（第二図と呼ぶ）。

このようにして第一次近似で、$L^{(1)}(X_2)$，$L^{(1)}(X_3)$をうるが、後述の三・六式より分かるように、$r_{23}=0$でない限り、これらは真の偏回帰係数は与えない。r_{23}の影響を除去してゆくために、次のようにして第一図、第二図の$L^{(1)}(X_2)$，$L^{(1)}(X_3)$を逐次修正してゆく。

(ハ) ベネットの表現によれば第二図に於いて、残差 $e_{(2)}^{(1)}=e_1^{(1)}-L^{(1)}(X_3)$を求め、この $e_{(2)}^{(1)}$を第一図でえた$L^{(1)}(X_2)$の周りにプロットする。即ち、観測値 j に対して、$L^{(1)}(X_{2j})$，$e_{2j}^{(1)}$が定まるから、第一図の縦軸に

$L^{(1)}(X_2)+e_2^{(1)}$を、横軸にX_2をとつて、n この点がプロットされる。このようにして得られたch($L^{(1)}(X_2)+e_2^{(1)}, X_2$)にL.S.L, $L^{(2)}(X_2)$をフィットする。$L^{(1)}(X_2)+e_2^{(1)}=X_1-L^{(1)}(X_3)$であるから$L^{(2)}(X_2)$は$X_1-L^{(1)}(X_3)$の$X_2$に対する単純なL.S.Lになつている。

(ロ) (イ)と同じ要領に従つて、残差 $e_1^{(2)}=X_1-L^{(1)}(X_3)-L^{(2)}(X_2)$を求め、ch($L^{(1)}(X_3)+e_1^{(2)}, X_3$)を作り、これにL.S.L, $L^{(2)}(X_3)$をフィットする。$L^{(1)}(X_3)+e_1^{(2)}=X_1-L^{(2)}(X_2)$であるから、$L^{(2)}(X_3)$は$X_1-L^{(2)}(X_2)$の$X_3$に対する単純なL.S.Lになつて来る。

以下、第一図、第二図でこのような操作を反復してゆくことにより、$L^{(m)}(X_2)$, $L^{(m)}(X_3)$ (m=1.2……)が順次えられてゆくが、この反復的操作はこれらの直線が安定してゆくまで続けられる。

この逐次近似、或いは反覆法の一般にK変数への場合への適用については、三変数の場合から容易に類推されえよう。ベネットでは四変数の場合で説明されている。

(3・5) 実際の図式作業では各図上でのフィットは最小二乗法の原理に近似する実用的なルールに基いて、フリーハンドで行われるのであるが、仮に今フィットが理想的に正確に行われたものと想定する。即ち正確なL.S.Lがえられているものとする。以上の3・1ないし3・5の条件の下では、各図上には

$L^{(1)}(X_2)$; $x_1=b_{12\cdot3}^{(1)}x_2+e_1^{(1)}$

$L^{(1)}(X_3)$; $e_1^{(1)}=b_{13\cdot2}^{(1)}x_3+e_2^{(1)}$

$L^{(2)}(X_2)$; $x_1-b_{13\cdot2}^{(1)}x_3=b_{12\cdot3}^{(2)}x+e_1^{(2)}$

$L^{(2)}(X_3)$; $x_1 - b_{12\cdot3}^{(2)}x_2 = b^{(2)}_{13\cdot2}x_3 + e_2^{(2)}$

なる直線が唯一にえられてゆくことになる。このようにしてえられた $b_{12\cdot3}^{(m)}$, $b_{13\cdot2}^{(m)}$; $m=1,2,\dots\dots$ は如何なる性質をもつているものかと云うと、

$$\left.\begin{aligned} b_{12\cdot3}^{(m)} &= b_{12\cdot3} + b_{13\cdot1}\frac{a_{23}}{a_{22}} r_{23}^{2m-2} \\ b_{13\cdot2}^{(m)} &= b_{13\cdot2}(1 - r_{23}^{2m}). \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (3.6)$$

であることが云える。(註) (3.6)式中に現われる、$b_{12\cdot3}$, $b_{13\cdot2}$は数式解法でえられるところの偏回帰係数である。(3.4)の記号を用いて表せば

$$b_{12\cdot3} = \frac{s_1}{s_2}\cdot\frac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{1-r_{23}^2},\quad b_{13\cdot2} = \frac{s_1}{s_3}\cdot\frac{r_{13}-r_{12}r_{23}}{1-r_{23}^2}$$

である。尚$b_{12\cdot3}^{(1)}$はX_1のX_2に対する単純な回帰係数b_{12}になつている。即ち$b_{12\cdot3}=(a_{12}/a_{22})=b_{12}$。(3.6)式は$b_{12\cdot3}$, $b_{13\cdot2}$が存在する限り、恒等的に成立する関係である。従つて修正を無限に繰返してゆくことにより、$b_{12\cdot3}^{(m)}$, $b_{13\cdot2}^{(m)}$はそれぞれ、$b_{12\cdot3}$, $b_{13\cdot2}$へと収斂してゆくことになる($r_{23}<1$であるから)。而してその収斂速度はr_{23}の大いさに依存していることが分かる。r_{23}が1に近い場合を考えてみると、収斂は非常に遅くなろう。実際には$b_{13\cdot2}$, $b_{12\cdot3}$と著しく異つているのにも拘らず、分析者には恰かも$L(X_2)$, $L(X_3)$が安定しているが如き観を感ぜしめる危険があるわけである。この点はこの図式解法の本質的な欠陥と云えよう。更に(3.6)式から分かるように、ある段階の$b_{13\cdot2}^{(m)}$はつねに

$b_{13\cdot2}$に比して過小の大いさになつている。従つてフィットをX_2を先にするか後にするかの順序の効果は厳密には無視しえない。

（註）5の(5.1)式を参照。

4　数式的逐次解法 (Numerical iterative method) について。

3では三変数についてではあるが、図式解法でとつている逐次近似を述べ、その収斂値は数式解法による最小二乗法による回帰係数 $b_{12\cdot3}$, $b_{13\cdot2}$ に一致することを示した。このことは、より多変数の場合についても云えることである。更に3で述べた逐次近似に於いては第一次近を $b_{12\cdot3}^{(1)}=b_{12}$ にとつたが、然し $b_{12\cdot3}^{(m)}$, $b_{13\cdot2}^{(m)}$ をそれぞれ $b_{12\cdot3}$, $b_{13\cdot2}$ に収斂させる目的のためには $b_{12\cdot3}^{(1)}$ は任意に定められたものであつても差支えない。これらの点を明らかにするためには、数式解法と図式解法との操作上の関聯を明確にしておくことが必要である。

今迄、吾々が数式解法と云つたものは次の如き方法であつた。取り扱う変数を一般にk変数とする、即ちX_1を従属変数、X_2,…X_k, を独立変数とせば、次の残差平方和 (SSE) を最小にするように b_2,…,b_k, 等定めた。

$$SSE=\sum_{j=1}^{n}(x_1-b_2x_2-b_3x_2-\cdots\cdots-b_kx_k)^2$$

この様にして定められた b_2,…b_k はそれぞれ偏回帰係数と呼ばれ、$b_{12\cdot3\cdots k}$, $b_{13\cdot2\cdots k}$, $b_{1k\cdot23\cdots(k-1)}$ と記されることが多いが、玆では簡単に b_2,…,b_k と表しておく。従つて、次の連立方程式（正規方程式と呼ぶ）が得られ、この方程式の解として、b_2,…,b_k が求められる。

$$\left.\begin{array}{l} b_2a_{22}+b_3a_{23}+\cdots\cdots+b_ka_{2k}=a_{12} \\ b_2a_{32}+b_3a_{33}+\cdots\cdots+b_ka_{3k}=a_{13} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_2a_{k2}+b_3a_{k3}+\cdots\cdots+b_ka_{kk}=a_{1k} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (4.1)$$

茲で用いたa_{ik}については(3.4)で述べた。尚(4.1)が唯一解をもつためには、a_{ik}を要素とする行列を(a_{ik})とかき、その階数(rank)を$r(a_{ik})$で示せば

$$r(e_{ik})=k<n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.2)$$

であることが必要である。更に$x_{ij}=X_{ij}-\bar{X}_i$より作られる行列を(x_{ij})、その転置行列を(x_{ji})とかけば、$(a_{ik})=(x_{ij})(x_{ji})$であるから、(4.2)式は又

$$r(x_{ij})=k \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4.2)'$$

ともかける。以下の論議では当然(4.2)或いは(4.2)'式は満足されているものとする。(4.1)の厳密解の求め方については別稿に譲るとして、茲では連立方程式(4.1)の近似解法について考察してみる。

粗雑な方法としては(4.1)式の代りに

$$\left.\begin{array}{r} b_2a_{22}=a_{12} \\ b_3a_{33}+b_2a_{32}=a_{13} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_ka_{kk}+\cdots\cdots b_3a_{k3}+b_2a_{k2}=a_{1k} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (4.3)$$

なる方程式を解いて順次に $b_2, \cdots b_k$, を求めることである。3で述べた図式解法に於ける第一近似の定め方は、数式的に翻訳すれば(4.3)の型の方程式系を解いているのと同等になつている。

$$b_{12\cdot3}^{(1)}a_{22}=a_{12}$$

であり、$b_{13\cdot2}^{(1)}$ は

$$b_3a_{33}+b_{12\cdot3}^{(1)}a_{32}=a_{13}$$

より b_3 を定めることにより得られる。

(4.1)式より比較すれば分かるように、a_{ii} に比して $a_{ik(i\neq k)}$ が無視しうる大いさであれば、図式的に翻訳して云えば r_{ki} が0に近かければ第一次近似で充分正確な近似解をうることが出来る。図式解法に於いては、第一近似の $b_{12\cdot3}^{(1)}, b_{13\cdot2}^{(1)}$ を修正するために、反復的な逐次近似を用いたが、この操作は数式的にはどの様な操作になつているであろうか？

(4.1)式の逐次近似解法として次の如き近似法があることは、数値計算論でよく知られている。(逐次解法と呼ばれている。仮に図式解法のものと区別して数式的逐次解法と呼ぶことにする。)

四変数の場合について説明すると

正規方程式

$$b_2a_{22}+b_2a_{23}+b_4a_{24}=a_{12}\cdots\cdots\cdots\cdots(4.41)$$

$$b_2a_{32}+b_3a_{33}+b_4a_{34}=a_{13}\cdots\cdots\cdots\cdots(4.42)$$

$$b_2a_{42}+b_3a_{43}+b_4a_{44}=a_{14}\cdots\cdots\cdots\cdots(4.43)$$

(イ) (4.43) 式の b_2, b_3 に $b_2^{(1)}$, $b_3^{(1)}$ を与え

$$a_{44}b_4 = a_{14} - b_2^{(1)}a_{42} - b_3^{(1)}a_{43}$$

より $b_4^{(1)}$ を定める。$b_2^{(1)}$, $b_3^{(1)}$ は任意値であつてよい。

(ロ) (4.41) 式の b_3, b_4 に $b_3^{(1)}$, $b_4^{(1)}$ を与え

$$a_{22}b_2 = a_{12} - b_3^{(1)}a_{23} - b_4^{(1)}a_{24}$$

より $b_2^{(2)}$ を定める。

(ハ) (4.42) 式の b_2, b_4 に $b_2^{(2)}$, $b_4^{(1)}$ を与え

$$a_{33}b_3 = a_{13} - b_2^{(2)}a_{32} - b_4^{(1)}a_{34}$$

より $b_3^{(2)}$ を定める。

(イ)′ (4.43) 式の b_2, b_3 に $b_2^{(2)}$, $b_3^{(2)}$ を与え、(イ)と同じ要領で $b_4^{(2)}$ を定める。

このような操作を繰返すことによつて、逐次 $b_2^{(m)}, b_3^{(m)}, b_4^{(m)}$, ${}_{m=1,2\cdots\cdots}$ を求めてゆく。この操作は一般の k 変数について云えば、(m−1) 回の逐次近似によつてえられた近似値を $b_i^{(m)}$, ${}_{i=2,3,\cdots k}$ とせば、$b_i^{(m+1)}$, ${}_{i=2,3,\ldots k}$ は

$$\left.\begin{array}{l}
a_{22}b_2^{(m+1)} = a_{12} - b_3^{(m)}a_{23} - b_4^{(m)}a_{24} \cdots\cdots\cdots\cdots - b_k^{(m)}a_{2k} \\
a_{33}b_3^{(m+1)} = a_{13} - b_2^{(m+1)}a_{32} - b_4^{(m)}a_{34} \cdots\cdots\cdots\cdots - b_k^{(m)}a_{3k} \\
a_{44}b_4^{(m+1)} = a_{14} - b_2^{(m+1)}a_{42} - b_3^{(m+1)}a_{43} \cdots\cdots\cdots - b_k^{(m)}a_{4k} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{kk}b_k^{(m+1)} = a_{1k} - b_2^{(m+1)}a_{k2} - b_3^{(m+1)}a_{k3} \cdots\cdots - b_{k-1}^{(m+1)}a_{k,k-1}
\end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (4.5)$$

(4.5)の方程式系を順次、解くことによつて求められる。この逐次近似過程（iterative process）は、別の観点から見ると次の如き操作と同等になつている。

四変数の場合について云うと前記の、

(イ)は

$$SSE=\sum_{j=1}^{n}(x_1-b_2^{(1)}x_2-b_3^{(1)}x_3-b_4x_4)^2$$

を極小にするように、b_4を定めることで、この解が $b_4^{(1)}$ になる。

(ロ)は

$$SSE=\sum_{j=1}^{n}(x_1-b_3^{(1)}x_3-b_4^{(1)}x_4-b_2x_2)^2$$

を極小にするように、b_2を定めることで、この解が $b_2^{(2)}$ になる。

(ハ)は

$$SSE=\sum_{j=1}^{n}(x_1-b_2^{(2)}x_2-b_4^{(1)}x_4-b_3x_3)^2$$

を極小にするように、b_3を定めることで、この解が $b_3^{(2)}$ になる。

この数学的な操作が、図式解法で採つている逐次近似の操作と同等なものになつていることは、容易に了解されよう。

例えば3で述べた三変数の時の図式解法に於ける逐次近似に対応するところの、数式的な近似過程は

正規方程式

$$b_{12\cdot3}a_{22}+b_{13\cdot2}a_{23}=a_{12}\cdots\cdots\cdots\cdots(4.61)$$

$$b_{12\cdot3}a_{32}+h_{13\cdot2}a_{33}=a_{13}\cdots\cdots\cdots\cdots(4.62)$$

を次の如く逐次的に解くことである。

(イ) (4.62)式の $b_{12\cdot3}$ に b_{12} (x_1 の x_2 に対する単純な回帰係数) を与えて、$b_{13\cdot2}^{(1)}$を定める。

この操作は上述の如く $\sum_{j=1}^{n}(x_1-b_{12\cdot3}^{(1)}x_2-b_{13\cdot2}x_3)^2$ を極小にする如く $b_{13\cdot2}$ を定め $b_{13\cdot2}^{(1)}$ をうることになつているのである。この数式的な手続きは実は3の図式解法に於いて $ch(e_1^{(1)}, X_3)$ に L.S L, $L^{(1)}(X_3)$ をフィットして、$b^{(1)}_{13\cdot2}$ を定めていることと全く同等である。

(ロ) (4.61)式の $b_{13\cdot2}$ に $b_{13\cdot2}^{(1)}$ を代入して、$b_{12\cdot3}^{(2)}$ を定める。

これは、図式解法に於いて、$ch(L^{(1)}(X_2)+e_2^{(1)}, X_2)$ に $L^{(2)}(X_2)$ をフィットして $b_{12\cdot3}^{(2)}$ を定めることと同等である。

(ハ) (4.62)式の $b_{12\cdot3}$ に $b_{12\cdot3}^{(2)}$ を代入して $b_{13\cdot2}^{(2)}$ を定める。

これは $ch(L^{(2)}(X_3)+e_1^{(2)}, X_3)$ に $L^{(2)}(X_3)$をフィットして $b_{13\cdot2}^{(2)}$ を定めることと同等である。

このように図式解法でとつている逐次近似法は（各図上のフィットがフリーハンドでなされているから、そのためのエラーを無視して考えれば）、数式解法の基となる正規方程式(4.1)を(4.5)の型の方程式系にして逐次に近似解を求めてゆく逐次解

法と全く同等であることが分かつた。更に3で述べた第一次近似のやり方は、数式的には(4.3)を解くのと同等であつた。結局、異る所は唯、逐次近似を図式的に行つているか数式的に行つているかの相違であつて、原理は両者同じである。図式で行えばフィットがフリーハンドで行われるから、そのためのエラーが介入して来ることになる。この点に留意して数式解法と図式解法との関係を一言で云えば、(4.1)式の厳密解と近似解（逐次解法による）との関係を論ずることと全く同等であると云える。

5　逐次解法の収斂について。

3では第一次近似を特に $b_{12.3}^{(1)}=b_{12}$ とした時、$b_{12.3}^{(m)}$, $b_{13.2}^{(m)}$, は $m\to\infty$ で $b_{12.3}, b_{13.2}$ に収斂することを述べたが、一般に(4.5)式により逐次近似過程でえられる近似値 $b_i^{(m)}{}_{,\,i=2,3,\cdots k}$ は $m\to\infty$ で正規方程式の厳密解、即ち数式解法による最小二乗法による回帰係数 $b_2, b_3, \cdots b_k$ に収斂してゆくことを述べよう。勿論第一次近似の $b_i^{(1)}{}_{i=2,3\cdots(k-1)}$ は任意に与えられたものであつて差支えない。

収斂条件としては

(イ)行列 (a_{ik}) が対称であること。即ち $a_{ik}=a_{ki}$

(ロ)行列 (a_{ik}) により定められる二次形式が正値であること

が成立することが必要である。(イ)については a_{ik} の定義(3.4)からして明らか。(ロ)である為には行列 (x_{ij}) の階数がkであることが云えればよい。この条件は(4.2)或いは(4.2)′式より分かるように正規方程式(4.1)が唯一解をもつと云う条件であつ

た。従つて正規方程式が唯一解をもつ限り、即ち最小二乗法を用いた数式解法による値が唯一確定する限り、逐次解法による近似値、$b_i^{(m)},_{i=2,3,\cdots k}$ はそれぞれ $m \to S$ で厳密解 $b_i,_{i=2,3\cdots k}$ に収斂する。別の云い方をすれば、図式解法によりえられる近似値が収斂してゆくためには、数式解法による値が唯一確定していることである。

次に簡単に三変数の場合について此の収斂性を具体的に考察してみることにする。

三変数の場合には(4.5)式は次の如くなる。

$$a_{22}b_2^{(m+1)} = a_{21} - a_{23}b_3^{(m)}$$

$$a_{33}b_3^{(m+1)} = a_{31} - a_{32}b_2^{(m+1)}$$

正規方程式の厳密解を b_2, b_3 として

$$b'^{(m)}_2 = b_2^{(m)} - b_2,\quad b'^{(m)}_3 = b_3^{(m)} - b_3 \qquad (m=1.2,\cdots\cdots)$$

とおけば

$$b'^{(m+1)}_2 + b_2 = -\frac{a_{23}}{a_{22}} b'^{(m)}_3 - b_3\frac{a_{23}}{a_{22}} + \frac{a_{21}}{a_{22}}$$

$$b'^{(m+1)}_3 + b_3 = -\frac{a_{32}}{a_{33}} b'^{(m+1)}_2 - b_2\frac{a_{32}}{a_{33}} + \frac{a_{31}}{a_{33}}$$

をうる。b_2, b_3 が厳密解であることから

$$b'^{(m+1)}_2 = -\frac{a_{23}}{a_{22}} b'^{(m)}_3,\quad b'^{(m+1)}_3 = -\frac{a_{32}}{a_{33}} b'^{(m+1)}_2$$

をうる。従つて

$$b'^{(m+1)}_2=\frac{a_{23}^2}{a_{22}a_{33}}b'^{(m)}_2=r_{23}^{(2)}b'^{(m)}_2,\quad b'^{(m+1)}_3=r_{23}^2b'^{(m)}_3$$

この関係は $m=1,2,\cdots\cdots$ で成立するから、

$$\left.\begin{aligned}
b_2^{(m)}-b_2&=r_{23}^{2m-2}(b_2^{(1)}-b_2)\\
b_3^{(m)}-b_3&=r_{23}^{2m-2}(b_3^{(1)}-b_3)\\
&=-\frac{a_{32}}{a_{33}}(b_2^{(m)}-b_2)=-\frac{s_2}{s_3}r_{23}^{2m-1}(b_2^{(1)}-b_2)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5.1)$$

をうる。(5.1) 式から $m\to\infty$ で $b_2^{(m)}, b_3^{(m)}$ はそれぞれ b_2, b_3 に収斂してゆくことは明らかであるが、近似値のもつ誤差の大いさに関して (5.1) は次のことを示めしている。ある近似値のもつ誤差の大いさは、(イ) r_{23} の大いさ、の他に、(ロ)第一近似に於ける誤差 $b_2^{(1)}-b_2$ に影響される。

即ち3の時と同じように r_{23} の大きい程、ある段階の近似値の誤差は大きくなるが、それ以外に第一次近似の時犯した誤差も影響することがわかる。

仮りに今、$(b_2^{(m)}-b_2)/(b_2^{(1)}-b_2)$ でもつて、この逐次近似に於ける m 番目の近似値の相対的誤差（R.E）と云うことにすれば、%表示で $r_{23}^{2m-2}\times 100$ である。

たとえば $r_{23}=0.2$ の時には

逐次近似を1回やれば R.E は4％

逐次近似を二回やれば R.E は 0.16%

他方 $r_{23}=0.9$ の時には

逐次近似を一回やつて R.E は 81%

逐次近似を二回やつて R.E は 65.61%

である。

又 $(b_2^{(m)}-b_2)/(b_2^{(m+1)}-b_2)$ の大小をもつて、収斂速度の大小とせば $(r_{23})^{-2}$ であつて、r_{23} が大きい程、収斂速度は緩かになる。茲で留意すべきことは、収斂速度は r_{23} の大いさのみに依存して第一次近似の誤差には関係せぬと云うことである。r_{23} の大いさは、従つて収斂速度は図式解法で如何なる変数を取り扱つているかにより決定されてしまう。この点は後述する所のビーン法の役割を考える際、特に留意すべき点である。

6　第一次近似について。

5に於いて三変数の場合について、逐次解法による近似値の誤差の大いさは、独立変数間の相関係数、並びに第一次近似の際に犯す誤差に依存することを指摘したが、この関係は、三変数のみならず、より多変数の場合についても一般的に云えることである。一般にk相変数の場合には、(5.1)式の代りに(註) $b_i^{(m)}-b_i$ は第一次近似の際の誤差、$(b_2^{(1)}-b_2)$, $(b_3^{(1)}-b_3)$, ……$(b_{k-1}^{(1)}-b_{k-1})$, の一次結合式でもつて表現される。

今第一次近似の特別な場合を考えてみる。

(三変数の場合)

若し $b_2^{(1)}=b_2$, とせば(5.1)式より $b_3^{(1)}=b_3$ となり、以下の逐次近似は必要なくなる。此の関係はより多変数についても云えることで四変数の場合なら、$b_2^{(1)}=b_2, b_3^{(1)}=b_3$ ならば $b_4^{(1)}=b_4$ である。

（一般のk変数の場合）

$b_2^{(1)}=b_2, b_3^{(1)}=b_3, \dots, b_{k-1}=b_{k-1}$ ならば $b_k^{(1)}=b_k$ である。何故なら $b_k^{(1)}$ は

$$a_{kk}b_k^{(1)}=a_{1k}-a_{2k}b_2^{(1)}-a_{k3}b_3^{(1)}-\cdots\cdots-a_{kk-1}b_{k-1}^{(1)} \qquad \cdots\cdots(6.1)$$

により定められるのであるし、(6.1)式は又

$$a_{kk}(b_k^{(1)}-b_k)=-\{a_{k2}(b_2^{(1)}-b_2)+\cdots\cdots+a_{kk-1}(b_{k-1}^{(1)}-b_{k-1})\}$$

と書けるから、若し、$b_2^{(1)}=b_2, \dots, b_{k-1}^{(1)}=b_{k-1}$ であれば当然、$b_k^{(1)}=b_k$ をうる。

この関係を図式解法の場合に飜訳して表現すれば、第一図、第二図、…に於いてフィットされた $L(X_2)$, $L(X_3)$, … $L(X_{k-1})$ の傾斜が正確に、偏回帰係数 $b_2, b_3, \dots b_{k-1}$ に一致しておれば、第k図に於いてフィットされる単純なL.S.Lは正確に偏回帰係数 b_k を与える、と云うことである。

$e_1=x_1-b_2x_2-\cdots-b_{k-1}x_{k-1}$ とせば第k図でフィットされたL.S.L. $L(X_k)$ は e_1 の x_k に対する単純な回帰係数 b_{e_1, x_k} を与えるが、この図式的な操作は4で述べた通り、(6.1)式を数式的に解いていることに同等になつているのであるから明らかに

$$b_{e_1, x_k}=b_k$$

である。

（註） $b_i^{(m)}-b_i=d_i^{(m)}$　$i=2,3,\dots\dots,k$ とおけば(4.5)式より

$$
\left.\begin{aligned}
a_{22}d_2^{(m+1)} &= -\left(a_{23}d_3^{(m)} + a_{24}d_4^{(m)} + \cdots\cdots + a_{2k}d_k^{(m)}\right)\\
a_{33}d_3^{(m+1)} + a_{32}d_2^{(m+1)} &= -\left(\bigcirc + a_{34}d_4^{(m)} + \cdots\cdots + a_{3k}d_k^{(m)}\right)\\
a_{44}d_4^{(m+1)} + a_{43}d_3^{(m+1)} + a_{42}d_2^{(m+1)} &= -\left(\bigcirc + \bigcirc + a_{45}d_5^{(m)} + \cdots + a_{4k}d_k^{(m)}\right)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{kk}d_k^{(m+1)} + \cdots\cdots + a_{k3}d_3^{(m+1)} + a_{k2}d_2^{(m+1)} &= \bigcirc
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(6.2)
$$

又 (6.2) 式は行列記号を用いれば次の如く書改められる。

$$
A = \begin{pmatrix}
\bigcirc & \cdots & \bigcirc & \cdots & \bigcirc & a_{22}\\
\bigcirc & \cdots & \bigcirc & \cdots a_{33} & & \vdots\\
\vdots & & & & & \vdots\\
a_{k-1,k-1}, & \cdots & \cdots & a_{k-1,3} & & a_{k-1,2}
\end{pmatrix}
$$

$$
B = \begin{pmatrix}
\dfrac{a_{2k}^2}{a_{kk}}, & \left(\dfrac{a_{2k}a_{3k}}{a_{kk}} - a_{23}\right), & \cdots\cdots, & \left(\dfrac{a_{k-1,k}a_{2k}}{a_{kk}} - a_{2,k-1}\right)\\
\dfrac{a_{3k}a_{2k}}{a_{kk}}, & \dfrac{a_{3k}^2}{a_{kk}}, & \cdots\cdots, & \left(\dfrac{a_{k-1,k}a_{3k}}{a_{kk}} - a_{3,k-1}\right)\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\dfrac{a_{k-1,k}a_{2k}}{a_{kk}}, & \dfrac{a_{k-1,k}a_{3k}}{a_{kk}}, & \cdots\cdots, & \dfrac{a^2_{k-1,k}}{a_{kk}}
\end{pmatrix}
$$

として

$$
A\begin{pmatrix} d_2^{(m+1)}\\ d_3^{(m+1)}\\ \vdots\\ d_{k-1}^{(m+1)} \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} d_2^{(m)}\\ d_3^{(m)}\\ \vdots\\ d_{k-1}^{(m)} \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots(6.3)
$$

(6.3) 式は更に

$$\begin{pmatrix} d_2^{(m+1)} \\ d_3^{(m+1)} \\ \vdots \\ d_{k-1}^{(m+1)} \end{pmatrix} = A^{-1}B \begin{pmatrix} d_2^{(m)} \\ d_3^{(m)} \\ \vdots \\ d_{k-1}^{(m)} \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (A^{-1}\text{は行列}A\text{の逆行列})$$

とかけるから

$$\begin{pmatrix} d_2^{(m)} \\ d_3^{(m)} \\ \vdots \\ d_{k-1}^{(m)} \end{pmatrix} = (A^{-1}B)^{m-1} \begin{pmatrix} d_2^{(1)} \\ d_3^{(1)} \\ \vdots \\ d^{(1)}{}_{k-1} \end{pmatrix}。$$

をうる。尚

$$d_k^{(m)} = -\frac{1}{a_{kk}}\left(a_{k2}d_2^{(m)} + d_{k3}d_3^{(m)} + \cdots\cdots + a_{k,k-1}d_{k-1}^{(m)}\right)$$

である。

* * * * *

7　ビーン法 (Bean's guide) について。

以上、これまでは、図式解法でとつている逐次近似法を主として論じてきた。その結果を要約して云えば、

(7.1)　図式解法でとつている逐次近似法は、数式解法の基となる正規方程式を逐次解法によつて図式的に逐次近似してゆくことである。

(7.2)　逐次解法による近似度は第一次近似の際の誤差と、独立変数間の相関係数 (r_{ik}) の大いさとに依存する。若し第一図、第二図、…、第k－1図で真の(net)偏回帰係数がえられておれば、第k図に於いてフィットされる、L. S. L

は真の（net）偏回帰係数を与える。

と云うことであつた。(r_{ik}') の大いさは図式解法において、如何なる変数を用いたかにより決定してしまうのであるから、図式解法による分析者によつて、コントロールされうるものは第一次近似の際の誤差部分だけである。3で述べた図式解法にあつては、第一次近似の定め方は、数式的には、(4.3) によつて定めることであつて、$b_2^{(1)}=b_2,\dots,b_{k-1}^{(1)}=b_{k-1}$ になる $r_{ik}=0$ の場合だけである。r_{ik} で高い値を示めすものがあれば、第一次近似の誤差は大きくなろう。図式解法に於ける、もう一つの操作たるビーン法のもつ機能はこの第一次近似をより正確に行うことにより、真の（net）回帰係数、即ち、最小二乗法による数式解法に於ける値への収斂を速めることにある。このために、ビーンは次の如き操作を行うことを提言した。

三変数の場合で云えば、

X_3 の値の同一、或いは略同一な観測値 (X_1, X_2, X_3) を一つのグループにまとめ、各グループ毎に X_1 の X_2 に対する単純な L.S.L を求め、各直線の平均的な傾斜をもつ直線を第一図にフィットする。

このようにしてフィットされた直線の傾斜が $b_{12.3}^{(1)}$ を与えることになる。以下この $b_{12.3}^{(1)}$ の性質について考察してみることにする。

この点を明らかにするためには、これまでの論義では必要としなかつたけれども、変数間の関係について、確率的モデルを明確に設定することが必要である。次の如き標準的モデルを想定してみる。

(7.3) 線形な回帰関係が成立しているものとする。

$$x_1=\beta_2x_2+\beta_3x_3+\varepsilon$$

即ち、x_2, x_3 の或る値 (fixed value) に対して、変数 x_1 は平均 $\beta_2 x_2+\beta_3 x_3$ をもつ確率変数である。且つ他の或る値に応ずる x'_1 とは独立に分布するものとする。確率変数についての平均をEで表すことにすれば

$$E(\varepsilon)=E(\varepsilon,\cdot\varepsilon')=0$$

なお $E(\varepsilon^2)=\sigma^2$ とする。

(7.4) 観測値 (X_1, X_2, X_3) は X_3 の大いさに注目して、その大いさの同一或いは略同一なものを一つのグループに入れて、$G_1, G_2, \cdots G_p$ なるグループに分類されたものとする。各グループ毎に X_1 の X_2 に対する L.S.L. $L_i(X_2)$, $i=1.2,\cdots p$ が正確にフィットされたものとする。フート(Ⅲ)は此の $L_i(X_2)$ を drift line と呼んでいる。$L_i(X_2)$; $x_{1(i)}=b_{2(i)}x_{2(i)}+e_{(i)}$, $e_{(i)}$ は残差。

(7.3)の条件の下では

$$E(b_{2(i)})=\beta_1+\beta_2\frac{a_{23(i)}}{a_{22(i)}}$$

である。

茲で $a_{23(i)}, a_{22(i)}$ 等は(3.4)の記号に準じて G_i 内の観測値に関するものである。即ち $a_{23(i)}=\sum_{(i)} x_{2(i)}x_{3(i)}$, $\sum_{(i)}$ は G_i についての和を表す。

これに対して数式解法でえられる $b_{12\cdot3}$ は、

$$E(b_{12\cdot3})=\beta_1$$

である。

他方(7.4)の如くグループ分けしないで求めた時のX_1のX_2に対する単純な回帰係数b_{12}は

$$E(b_{12})=\beta_1+\beta_2\frac{a_{23}}{a_{22}}$$

である。実際には、$G_1, G_2, \cdots G_p$ のグループ分けは、必ずしも正確にX_3を同一に保持して分類されるわけではないから、$b_{2(i)}$ はβ_1の不偏な推定値にはならない。X_2の影響が完全に除去されぬから、$a_{23(i)}/a_{22(i)}=0$ とはならない。然しグループ分けがより細かくなされれば、多くの場合、$a_{23(i)}/a_{22(i)}\doteqdot 0$ とみて差支えないであろう。

(7.5) 仮に理想的な場合を考えて、X_3が正確に同一になるようにグループ分けがなされたものと想定しよう。この場合には従つて、$L_{(i)}(X_2)$ は最小二乗法による数式解法によりえられる値 $b_{12.3}$ と同じくβ_1の不偏な推定値を与える。従つて、$b_{2(i)}$ の平均をもつて、第一図にフィットされた $L^{(i)}(X_2)$ の与える $b_{12.3}{}^{(i)}$ もやはりβ_1の不偏な推定値を与える。$b_{12.3}{}^{(i)}$ が $b_{12.3}$ と同じくβ_1の不偏な推定値であると云つても、常に $b^{(i)}_{12.3}=b_{12.3}$ が保証されると云うわけではない。ビーン法が図式解法に於いて、実際に効果的であるためには、$b_{12.3}{}^{(i)}$ が $b_{12.3}$ になるだけ近い値であらねばならない。従つて、差 $b_{12.3}-b_{12.3}$ が平均に於いて0であつても、その差が大きな（抽出）変動を示めす場合には、効果的であるとは云えないことになる。

(7.6) ビーン法にあつては $b_{2(i)}$ の平均を求める際、加重平均を用いてある。この操作の目的は $b_{12.3}{}^{(i)}$ の（抽出）変動をより小にすることにある。このことを数式的に考えれば

$E\left[\sum_{i=1}^{p}W_i b_{2(i)}\right]=\beta_1$ で且つ $V\left(\sum_i W_i b_{2(i)}\right)=E\left(\sum_i W_i b_{2(i)}-\beta_1\right)^2$ が極小になるようにウエイトW_iを定めることである。

(7.6)の如く理想的に加重されたものとせば

$$V(b_{2(i)}) = \beta_2^2\left(\frac{a_{23(i)}}{a_{22(i)}}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{a_{22(i)}}$$

$$= \frac{\sigma^2}{a_{22(i)}} \quad \text{(7.5)より} \cdots\cdots\cdots (7.7)$$

であるから、最適のウエイトは

$W_i = a_{22(i)} \Big/ \sum_{i=1}^{p} a_{22(i)}$　となつて　$V\left(\sum_{i=1}^{p} W_i b_{2(i)}\right) = \sigma^2 \Big/ \sum_{i=1}^{p} a_{22(i)}$

である。

又、(7.3)～(7.6)の条件の下では

$$V(b_{12.3}^{(i)} - b_{12.3}) = \sigma^2\left(\frac{1}{a_{22}(1-r_{23}^2)} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{p} a_{22(i)}}\right) \cdots\cdots\cdots (7.8)$$

を導くことが出来る。〔註〕

これに対して一般の変数の場合には、グループ分けは、$X_3, \dots, X_k$ の大いさに注目して行われる。もし正確に、$X_3, \dots X_k$ がグループ内で同一に保持されてあれば

$$V(b_{12.3\dots k}^{(i)} - b_{12.3\dots k}) = \sigma^2\left(C_{22} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{p} a_{22(i)}}\right)$$

である。茲に C_{22} は行列 (a_{ik}) の逆行列の二列二行目の要素である。

〔註〕

$$b_{12.3}^{(i)} - b_{12.3} = (b_{12.3}^{(i)} - \beta_2) - (b_{12.3} - \beta_2)$$

$$V(b_{12.3}^{(i)} - b_{12.3}) = E(b_{12.3}^{(i)} - \beta_2)^2 + E(b_{12.3} - \beta_2)^2 - 2E(b_{12.3}^{(i)} - \beta_2)(b_{12.3} - \beta_2)$$

しかるに $E(b_{12\cdot3}-\beta_2)^2=\sigma^2/a_{22}(1-r_{23}^2)$

又 $E(b_{12\cdot3}^{(1)}-\beta_2)^2=\sigma^2/\sum_{i=1}^{p}a_{22(i)}$ ……………………(7.7) より

$$b_{12\cdot3}^{(1)}-\beta_2=\sum_{j=1}^{p}W_i\frac{\sum_{(i)}\varepsilon x_2}{\sum_{(i)}x_2^2},\quad b_{12\cdot3}-\beta_2=\sum_{i=1}^{p}\sum_{(i)}\varepsilon\left(\sum_{e=2}^{3}c_{2e}\,x_e\right)$$

と書き改める。

茲で $c_{\cdot e}$ は行列 (a_{ik}) の逆行列の要素である。即ち

$$\sum_{k=2}^{3}a_{ik}c_{ke}=1\quad(i=e)\cdots\cdots\cdots\cdots(7.8)$$

$$E(b_{12\cdot3}^{(1)}-\beta_2)(b_{12\cdot3}-\beta_2)=E\left\{\sum_{i=1}^{p}\frac{W_i}{a_{22(i)}}\sum_{(i)}\varepsilon^2x_2\left(\sum_{e=2}^{3}c_{2e}\,x_e\right)\right\}$$

$W_i/a_{22(i)}=1/\sum_{i=1}^{p}a_{22(i)}$ であるから

$$E(b^{(1)}_{12\cdot3}-\beta_2)(b_{12\cdot3}-\beta_2)=\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{p}a_{22(i)}}\times\sum_{j=1}^{n}x_{2j}\left(\sum_{e=2}^{3}c_{2e}\,x_{ej}\right)$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{p}a_{22(i)}}\times\sum_{e=2}^{3}c_{2e}\,a_{e2}$$

$$=\sigma^2/\sum a_{22(i)}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(7.9)$$ より

以上をまとめて

$$V(b^{(1)}_{12\cdot3}-b_{12\cdot3})=\sigma^2\left(\frac{1}{a_{22}(1-r_{23}^2)}-\frac{1}{\sum_{i=1}^{p}a_{22(i)}}\right)$$

をうる。

*　*　*　*　*

従つて $b_{12.3}^{(1)}-b_{12.3}$ の変動は残差のバリアンス σ^2 に影響されるのほか、各 G_i 内での x_2 の変動に左右されることがわかる。一般に $a_{22(i)}, i=1,2,\ldots,p$ は、r_{23} が高い程、小になる傾向をもつているものであるから、従つて $V(b_{12.3}^{(1)}-b_{12.3})$ は小になつて来る。r_{23} が0に近いものであれば逆の傾向となり、ビーン法の効果は減じて来ることが分かる。r_{23} の大いさが無視しうる程度のものであれば、3で述べた第一次近似のやり方で充分であることは既に述べた通りである。

以上、三変数の場合を主として、$b_{12.3}$ の第一次近似の際のビーン法を述べた。一般のk変数の場合には、$b_2^{(1)}$ の他に $b_3^{(1)},\ldots,b^{(1)}_{k-1}$ を定めることが必要である。ビーン法の用い方は $b_2^{(1)}$ の時と同じ要領でやればよい。たとえば四変数の場合について云えば、$b_3^{(1)}$ を求める操作は次の如し。

(イ)第二図に於いて、$ch(x_1-b^{(1)}_2x_2, x_3)$ が作られるから、プロットされた点を x_4 の大いさに注目してグループ分けする。

(ロ)各グループ毎に $L_i^{(1)}(X_3)$ を求め、各直線の平均の傾斜をもつ直線 $L^{(1)}(X_3)$ を第二図にフィットする。$L^{(1)}(X_3)$ の与える傾斜が $b_3^{(1)}$ を定める。

四変数の場合には $b_2^{(1)}, b_3^{(1)}$ がえられれば $b_4^{(1)}$ は第3図の $ch(x_1-b_2^{(1)}x_2-b_3^{(1)}x_3, x_4)$ に単純な L. S. L. $L^{(1)}(X_4)$ をフィットして定められる。

(ニ)第二近似以下は4で述べた原理に従つて、逐次近似で実施されるわけである。

(ロ)でえられる $b_3^{(1)}$ は $b_2^{(1)}$ が β_2 の不偏な推定値であり且つグループ分けに於いて X_4 が完全に同一に保持されれば、β_3 の不偏な推定値を与える。

以上、述べてきたことから、ビーン法の図式解法に於ける役割は明らかにされたことと思う。ビーン法が理想的に行われた場合、確かに$b_{12\cdot3}^{(1)}$は$b_{12\cdot3}$よりも$V(b_{12\cdot3}^{(1)})\leqq V(b_{12\cdot3})$の意味で(7.8式より)$\beta_2$の、よりよい推定値になつている。

然しこの性質自体は図式解法に於いては問題にならない。図式解法に於いて必要なのは、$b^{(1)}_{12\cdot3}$と$b_{12\cdot3}$とがなるだけ近い値にあることである。この点が了解されれば、農業観測研究部会で問題になつて疑問は大半解決されたものと思う。ベネットも指摘していた点[I]であるが、ビーン法は図式解法に於いて重要な役割をもつているが、その効果を過信してはならないことである。これを用いたから常に第一次近似だけで充分であるというものではない。

もし此の操作が実際に効果的であつた時には、最小二乗法による数式解法でえられる値への収斂が速かになると云うだけのことである。即ちビーン法を用いたから、逐次近似の回数を節約してよいと云うものでは決してない。矢張り、第一図、第二図、…に於ける$L(X_2)$, $L(X_3)$,…が実際に安定してゆくまで図式的な逐次近似は遂行されねばならない。

重相関係数について。

8 三変数の場合について云えば、数式解法に於いては、重相関係数$R_{1\cdot23}$は、

$$R^2_{1\cdot23}=1-SSE/S_1^2$$

$$SSE=\sum_{j=1}^{n}(x_1-b_{12\cdot3}x_2-b_{13\cdot2}x_3)^2$$

で求められる。図式解法によつて求める場合には、第二図でえられる回帰線からの残差を図上から求め、その平方和を計算して、$R_{1\cdot23}$を得る。

今m−1回の逐次近似で $b_{12\cdot3}^{(m)}$，$b_{13\cdot2}^{(m)}$ の近似をえたとせば、この時の残差平方和（$SSE^{(m)}$）は

$$SSE^{(m)}=\sum_{j=1}^{n}(x_1-b_{12\cdot3}^{(m)}x_2-b_{13\cdot2}^{(m)}x_3)^2$$

である。若し、$b_{12\cdot3}^{(m)}, b_{13\cdot2}^{(m)}$ が真の偏回帰係数 $b_{12\cdot3}, b_{13\cdot2}$ に比べて、隔っておれば、これに基づいて計算される $SSE^{(m)}$ も当然不正確なものとなる。

$SSE^{(m)}$ は次の如く表すことが出来る。（註）

$$SSE^{(m)}=S.S.E+(d_2^{(m)}x_2+d_3^{(m)}x_3)^2,\quad d_2^{(m)}=b^{(m)}_{12\cdot3}-b_{12\cdot3},\quad d_3^{(m)}=b_{13\cdot2}^{(m)}-b_{13\cdot2}$$

一般のk変数の場合には、これに対して

$$SSE^{(m)}=SSE+\left(\sum_{i=2}^{k}d_i^{(m)}x_i)^2\right)\cdots\cdots(8.1)$$

$$SSE=\sum_{j}^{n}\left(x_1-\sum_{i=2}^{k}b_ix_i\right)^2$$

である。茲で $d_i^{(m)}=b_i^{(m)}-b_i$，$i=2,\cdots k$ である。

三変数の場合には(5.1)式より、

$$d_3^{(m)}=-\frac{a_{32}}{a_{33}}d_2^{(m)},\quad d_2^{(m)}=r_{23}^{2m-2}d_2^{(1)}$$

であるから、

$$SSE^{(m)}-SSE=(1-r_{23}^2)S_2^2\left\{r_{23}^{2m-2}(b_{12\cdot3}^{(1)}-b_{12\cdot3})\right\}^2\cdots\cdots(8.1)'$$

と書ける。$b_{12\cdot3}^{(1)}$ は $b_{12\cdot3}$ に対する第1次近似。

従つて(8.1)式に依らなくても、明らかであるが、

$$SSE^{(m)} \geqq SSE \quad \text{或いは} \quad R^{m}_{1\cdot 23\cdots k} \leqq R_{1\cdot 23\cdots k}$$

である。又 $m \to S$ で $SSE^{(m)}$ 或いは $R^{m}_{1\cdot 23\cdots k}$ は SSE 或いは $R_{1\cdot 23\cdots k}$ へと収斂することは明らかである。今、(8.1)、式に注目してみる。SSEへの近似度は偏回帰係数の時と同じく、r_{23} 並びに第一次近似の際の誤差とに依存することが知れる。

第一次近似が正確に行われれば r_{23} が如何程高くても $SSE^{(1)}=SSE$ がえられることは偏回帰係数の時と同じであるが、然し、r_{23} の影響の仕方は稍々複雑である。r_{23} が1に近い場合には、偏回帰係数の時にあつては、$b_{12\cdot 3}$, $b_{13\cdot 2}$ への近似は極めて、遅くなるが、SSE 或いは、$R_{1\cdot 23}$ に関しては必しもそうではないことが(8.1)、より分かる。5と同じようにSSE$^{(m)}$ の R.E を作れば

$$R.E = r_{23}{}^{2(2m-2)}$$

又収斂速度は $(r_{23})^{-4}$ であつて、偏回帰係数が r_{23} の二乗のオーダーであるのに比らべて四乗のオーダーになつている。逐次近似に於ける収斂状況が、SSE で測かるのと、偏回帰係数で測かるのとでは異つた様相を示めす点は留意すべきである。SSE で測つた方が、より収斂が速かであると云う点は、従属変数 X_1 の予測という目的からみれば好都合のことであろう。

（註） 一般のk変数の場合について。

$$SSE^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} (x_1 - b_2{}^{(m)} x_2 - b_3{}^{(m)} x_3 - \cdots - b_k{}^{(m)} x_k)^2$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(x_1-\sum_{i=2}^{k} b_i x_i\right)-\left(\sum_{i=2}^{k} d_i{}^{(m)} x_i\right)\right\}^2$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(x_1-\sum b_i x_i\right)^2+\left(\sum_{i=2}^{k} d_i{}^{(m)} x_i\right)^2-2\left(x_1-\sum_{i=2}^{k} b_i x_i\right)\left(\sum_{i=2}^{k} d_i{}^{(m)} x_i\right)$$

しかるに

$$\left(x_1-\sum_{i=2}^{k} b_i x_i\right)\left(\sum_{i=2}^{k} d_i{}^{(m)} x_i\right)=\sum_{i=2}^{k} d_i{}^{(m)}\left(a_{1i}-\sum_{e=2}^{k} b_e a_{ei}\right)$$

$b_e, {}_{e=2,\dots k}$ は正規方程式 $a_{1i}=\sum_{e=2}^{k} b_e a_{ei}$ $(i=2,3\cdots k)$ の解であるから

$$\left(x_1-\sum_{i=2}^{k} b_i x_i\right)\left(\sum_{i=2}^{k} d_i{}^{(m)} x_i\right)=0$$

従つて

$$SSE(m)=S.S.E+\left(\sum_{i=2}^{k} d_i{}^{(m)} x_i\right)^2$$

をうる。

偏相関係数について。

9　既に述べたように、図式解法によつて、第一図、第二図、……にフィットされた、$L(X_2)$, $L(X_3)$,… 等はそれぞれ偏回帰係数の近似値を与えた。一般の k 変数について云えば、$L^{(m)}(X_2)$, $L^{(m)}(X_3)$,… により与えられる単純な回帰係数 $b_2{}^{(m)}$, $b_3{}^{(m)}$,… 等は $m\to S$ でそれぞれ b_2, b_3,… に収斂するものであつた。これと同じようにして、第一図、第二図、…に示めされた、撒布図により与えられる単相関係数も $m\to S$ でそれぞれの偏相関係数に収斂する性質をもつものであろうか?

第一次近似に於いては第一図からえられる単相関係数は r_{12} であつた。今 $m-1$ 回の逐次近似を行えば第二図に於いては $ch(x_1-b_{12\cdot3}^{(m)}, x_3)$ がえられる。この撒布図からえられる単相関係数を ${}_{13}r_2^{(m)}$ と表そう。即ち

$$\left\{{}_{13}r_2^{(m)}\right\}^2=\left\{\sum_{j=1}^{n}(x_1-b_{12\cdot3}^{(m)}x_2)x_3\right\}^2\Big/a_{33}\times\sum_{j=1}^{n}(x_1-b_{12\cdot3}^{(m)}x_2)^2$$

である。

$$\sum_j(x_1-b_{12\cdot3}^{(m)}x_2)x_3=\sum_j(x_1-b_{12\cdot3}x_2)x_3+(b_{12\cdot3}-b_{12\cdot3}^{(m)})a_{23}$$

$$=b_{13\cdot2}a_{33}-d_2^{(m)}a_{23} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9.1)$$

茲で $d_2^{(m)}=b_{12\cdot3}^{(m)}-b_{12\cdot3}$

また $\sum_j(x_1-b_{12\cdot3}^{(m)}x_2)^2=\sum_j(x_1-b_{12\cdot3}x_2)^2+d_2^{(m)2}a_{22}-2d_2^{(m)}\sum_j(x_1-b_{12\cdot3}x_2)x_2$

$$=a_{11}(1-r_{12}^2+r_{23}^2b_{13\cdot2}^2)+a_{22}d_2^{2(m)}-2d_2^{(m)2}a_{23}b_{13\cdot2}\cdots\cdots\cdots\cdots (9.2)$$

従つて $m\to\infty$ で

$$\lim_{m\to\infty}\{{}_{13}r_2^{(m)}\}^2\equiv{}_{13}r_2^2=\lim_{m\to\infty}(9.1)\Big/\lim_{m\to\infty}(9.2)\times a_{33}$$

$$=b_{13\cdot2}a_{33}/a_{33}a_{11}(1-r_{12}^2+r_{23}^2b_{13\cdot2}^2)$$

をうる。尚 (9.1), (9.2) より分かるように第一次近似が正確に行われておれば $d_2^{(m)}=0$ となつて、${}_{13}r_2^{(m)}={}_{13}r_2$ である。

今 X_1 と X_3 との間の偏相関係数を $\rho_{13\cdot2}$ で表せば3変数の場合には

$$\rho_{13\cdot2}^2=(r_{13}-r_{12}r_{23})^2/(1-r_{12}^2)(1-r_{23}^2)$$

であるから、

$$ {}_{13}r_2{}^2=\rho_{13\cdot2}{}^2/\{1-r_{23}{}^2(1-\rho_{13\cdot2}{}^2)\} \quad\cdots\cdots(9.3)$$

をうる。(9.3)式より分かるように$\rho_{13\cdot2}\leqq1$であるから常に${}_{13}r_2{}^2\geqq\rho_{13\cdot2}{}^2$であることが分かる。従つて図式解法でえられる${}_{13}r_2$がもし、低い値を示しておれば、必らず$\rho_{13\cdot2}$も${}_{13}r_2$より更に低い値をもつ。他方、${}_{13}r_2$が高い値を示したとすれば、これは$\rho_{\cdot32}$が比較的高い値をもつているか、或いは独立変数間の相関係数r_{23}が非常に高いかの何れかであると云うことになる。エゼキールによれば上述の如き${}_{13}r_2$を part correlation と呼んでいる。

${}_{13}r_2{}^{(m)}$はその極限値${}_{13}r_2$に於いて$|{}_{13}r_2|\geqq|\rho_{13\cdot2}|$であつたわけであるが、この関係は任意のmについて成立するわけではない。例えば第一次近似が$b_{12\cdot3}{}^{(1)}=b_{12}$（$X_1$の$X_2$に対する単純な回帰係数）にとられたとせば (3.9),(9.1),(9.2)により

$$\sum_j(x_1-b_{12\cdot3}{}^{(m)}x_2)x_3=b_{13\cdot2}a_{33}(1-r_{23}{}^{2m})$$

$$\sum_j(x_1-b_{12\cdot3}{}^{(m)}x_2)^2=a_{11}\frac{(1-r_{12}{}^2)}{(1-r_{23}{}^2)}\times\left\{1-r_{23}{}^2[1-\rho_{13\cdot2}{}^2(1-r_{23}{}^{2m-2})^2]\right\}$$

となり

$$\{{}_{13}r_2{}^{(m)}\}^2=\rho_{13\cdot2}{}^2\times(1-r_{23}{}^{2m})^2\Big/\left\{1-r_{23}{}^2[1-\rho_{13\cdot2}{}^2(1-r_{23}{}^{2m-2})^2]\right\}$$

をうる。尚一般にk変数の場合X_1とX_kとの間の part correlation ${}_{1k}r_{2,\cdots(k-1)}$, 即ち$(x_1-b_2x_2-\cdots-b_{k-1}x_{k-1})$と$x_k$との間の単相関係数は

$$\{{}_{1k}r_{2,\cdots(k-1)}\}^2=a_{kk}b_k{}^2/(SSE+b_k{}^2a_{kk})$$

と表せる。

10 以上、図式解法を論ずるに当つて、フィットされる直線はすべて正確にフィットされたものとしてきた。図式解法の数学的基礎、並びに数式解法との関聯を考察する上には、かかる理想化は必要であるが、実際問題としては、フィットに於ける人為的な誤差は考慮されねばならない。フート[Ⅲ]では実際にも余り問題にならぬことが簡単に述べられているが、この点、未だ研討していない。然し此の種の誤差が数式解法による値への収斂を攪乱し、理想的に行われたものに比らべて収斂を遅らすことは確かであつて、その他、ビーン法に於ける平均的な $L(X_2), L(X_3), \cdots\cdots$ 等の当てはめ方などを考慮すると、図式解法を実際に効果的に使用するのには、個人的な熟練を可成り必要とするものと思われる。

引用文献

〔Ⅰ〕 Pearson and Bennet, '*Statistical Method*' p. 230～245.

〔Ⅱ〕 G・S・シェファード『農産物価格分析論』p. 153～180.

〔Ⅲ〕 R. J. Foote, 'The Mathematical Pasis for the Bean Method of Graphic Multiple Correlation' *Journal of The American Statistical Association* (Decem. 1953)

〔Ⅳ〕 統計研究会資料『農業観測の理論と適用(1)』（謄写刷）

（本所委託研究・統計調査部作統課）