テルンクビスト需要曲線の計測例

三枝義清

一、家計函数の型

家計データで消費―所得関係の分析を行なう際の曲線型としては、これまで一次式か対数一次式によるのが標準的であったが、最近の計測例をみると、これにいろいろの型のものが追加されてきている。ハウサアカー（H. S. Houthakker）は通常の最小自乗法で簡単にフィットしうるという条件を一つの基準にして、次の五種の関係式を掲げている（Prais, S. J. and Houthakker, H. S. *The Analysis of Family Budgets*, 1955）。

$\log Y=\alpha+\beta \log X$ (Double Log.)

$\log Y=\alpha-\beta/X$ (Log—inverse)

$Y=\alpha+\beta \log X$ (Semi Log)

$Y=\alpha+\beta X$ (Linear)

$Y=\alpha-\beta/X$ (Hyperbola)

このうち、Semi-Log. と Double-Log. を用いて農林省統計調査部が昭和三二年の都市家計調査のデータを基にして、各食品類を網羅的に計測している（農林省統計調査部調整課資料『都市食糧需要の計測』昭和三四年）。

第二の型はテルンクビスト型の需要曲線と称されるもので、適用例としては次の著者によるものが新らしい。

コーリン・クラーク

Colin clark. World supply and Requirements of Farm Products, *Journal of the Royal Statistical Society*, Series A, 1954.

L・ジュリーン

Jouréen, L. Long-Term Trends in Food consumption, A Multi-Country study, *Econometrica*, 1956.

いずれも次の型を用いている。

$$Y=3308X/X+13$$

Y：1人1日当りカロリー摂取量
X：1人当り実質所得，U. S. 弗

これはジュリーンの計測例で戦前のヨーロッパ一六カ国のデータを基にしたものである。用いた資料は違っているが、コーリン・クラークも同様な型を使っている。実際例は見ていないが、R・ストーン（R. Stone）が英国では〃ロジィスティク型がよくフィットする〃と述べているものに、次のような式がある。本質的にはテルンクビィスト型と類同のものと考えられる。これは人口の成長曲線を示すロジィスティク曲線を一般化したものである。

$$Y=K/1+\beta e^{-\alpha X}$$

これらの曲線の特長は従来の対数一次式と違って、有限な上限をもち、所得弾力性は所得の増加に従って単調に減少してゆく。第三の型として、同じような特長をもつところのシグモイド型の式があげられる。これは英国における戦前の家計調査の分析を中心にして展開されたもので、次式で表わされる。

$$Y=K\int_{-\infty}^{\alpha+\beta\log_e X}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\equiv KP\ (\alpha+\beta\ \log_e\ X)$$

右式の右辺はKを除けば周知の正規分布の$(\alpha+\beta\log_e X)$までの確率積分であるから、$P(\alpha+\beta\log_e\alpha)$と表現してある。常数$K$は消費量$Y$の上限であり、$\alpha$が代数的にみて大であればそれだけ現在の消費量が飽和点のKに接近しているわけであるので、αを Cheapness Coefficient と呼んでいる。経験的にはβを一にとって単純化しても適合度は変らぬようである。シグモイド型のもう一つの特長は（$\beta=1$にして）所得弾力性をY/Kに関係させると、αの値如何を問わず一通りの関係式で表現しつくされてしまう点である。一九三七—三八年の工場労働者家計を対象に、一二種類の商品群について行なった計測例（J. Aitchison and J. A. C. Brown, A Synthesis of Engel Curve Theory, *Review of Economic Studies. 1954*）によると、曲線型の選び方によって弾力性が特に両端の所得階層で著しく変化することが強調されている。後述するように、シグモイド型の曲線の当てはめは労力的であるが、品目並び所得両方向に対して適合度する範囲が拡くなっている。例えば必需品或いはぜいたく品いずれのグループに属する品目にも適用しうると云う利点がある。シグモイド型と並らべて第三の型に属するものとして、P・Rフィスク（P.R. Fisk, Maximum Likelihood Estimation of Törnqvist Demand Equation, *The Review of Economic Studies, 1958*）により提案された〃修正されたテルンクビスト型〃がある。テルンクビスト型の需要函数は財をぜいたく品、準ぜいたく品、必需品の三グループに区分して、それぞれについて次の函数を適用するものである。

必　需　品……$Y=KX/A+X$

準ぜいたく品……$Y=K(X-X_0)/A+(X-X_0)$　；$X_0 \leq X < S$

$=0$　；$X < X_0$

ぜいたく品……$Y=CX(X-X_0)/A+(X-X_0)$　；$X_0 \leq X < S$

$=0$　；$X < X_0$

フィスクが修正されたテルンクビスト型を導入した意図はシグモイド型のように、いずれのグループの品目にも適用しうるようにということであった。此の場合には修正式に現われるパラメターの大小により、各品目が必需品か或いはぜいたく品かと判別されるわけである。導入のプロセスはシグモイド型が導かれる場合（Aitchison and Brown, *The Lognormal Distribution*, 1958）と全く同様である。以下第二節でシグモイド或いはテルンクビスト型（修正された）の家計函数の導出過程を、第三節ではテルンクビイト型の計測例を紹介する。

二、シグモイド曲線について

生物統計学で対象にしている薬物の投量—死亡率曲線を表わすのにシグモイド曲線がよく使われている。この場合基礎になるのは特定個体(i)の反応曲線で、例えば

$$C_i=C(X, U_i)$$

Xは所定の薬物の投量レベルを示す変数。U_iは個体(i)の致死量で直接観測不能な係数である。C_iは次の如く定義される。

$$\begin{cases} C_i=0 & X<U_i \\ =1 & X\geqq U_i \end{cases}$$

つまり投入量が致死量 U_i を超過すればその個体は死亡するはずであるから、これを $C_i=1$ に対応させる。この反応曲線は各個体毎に与えられているわけで、需要分析でみれば各個人の需要曲線に対応すべきものである。次に個体の集団を考える。この集団について、致死量 U の分布曲線を密度函数の $f(U)$ で表わせば、投量レベル X に対応するところの平均死亡率 $P(X)$ が次式で表現できる。

$$P(X)=\int_{-\infty}^{\infty} C(X,U)\,f(U)dU$$
$$=\int_{-\infty}^{X} f(U)dU$$

$P(X)$ は投量レベル X を変数とする函数（投量―死亡率曲線）であるが、上式で見るようにその函数は密度函数 $f(U)$ になにを想定するかによって決まってくる。今 $\mathrm{Log}\,U$ が平均 m、分散 σ^2 の正規分布をするものと想定すると

$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha+\beta x} e^{-t^2/2}dt=P(\alpha+\beta x)\text{……(1)}$$

但し, $x=Log_e X$, $\alpha=-\frac{m}{\sigma}$, $\beta=1/\sigma$

このモデルは家計間の、テレビ、電気洗濯機、自動車等の不可分財の需要を表わす家計函数の導出にそのまま適

用できる。例えば家計 i の個別需要曲線 $C_i=C(U_i)$ を次の如く定義すればよい。簡単化して各家計とも一台以上は購入希望せぬものとしよう。X を所得を表わす変数。各消費者に対して当該財を購入するか否かの決意を左右する要因として隠伏的所得を想定する。即ちこの隠伏的所得が実際の所得額を超過しておればその消費者は購入を断念、逆に以下であれば購入するものと考える。

この隠伏的所得をパラメターの U_i とする。C_i の定義は

$$\begin{cases} C_i=0, & X<U_i \quad \text{(購入しない)} \\ \quad =1, & X\geqq U_i \quad \text{(購入する)} \end{cases}$$

対象とする家計集団について隠伏的所得 (U) の分布を対数正規型と考えれば $P\ (\alpha+\beta x)$ ——所得水準 X の階層における当該財の購入割合——は X を変数としてシグモイド曲線を描くことになる。なお所有台数が最高二台まで購入するとすれば、一台目の購入、二台目の購入に対して二個のパラメター U_1, U_2 —従って $f(U_1), f(U_2)$ を想定してゆくことになる。食糧品等の可分財の扱いも同じような考え方で進めて行くことが出来る (J. Aitchison and J. A. C. Brown. *Lognormal Distribution*, p. 126)。この場合には消費量を円価値単位で $1, 2, \ldots K$ 単位と分割して考える。単位数の K は各消費者間で差があるのは当然だが、いずれの消費者もある単位数以上は購入せぬものと仮定する。そうすると各消費者について $(U_1, U_2, \ldots\ldots U_K)$ なる隠伏的所得の組が対応する。これを対象消費者群について集合すると、所得軸上に稠密な分布をなすだろう。所得水準に対する平均消費額の関係はこの場合の分布型によって決ってくる。シグモイド型の曲線は対数正規分布を仮定することにより算出される。指数型のパレト分布を選べば Double-Log, を特殊な場合とする家計函数が得られる。P・R フイスクの〃修正されたテルンクビスト型〃はロジステイク分布

によるものである。テルンクビスト型の必需品に関する式を書き改めると

$$Y=K\int_{-\infty}^{-\log A+\log X}\frac{e^X}{(1+e^X)^2}\,dx \quad \cdots\cdots(2)$$

これを一般化することにより次式（修正されたテルンクビスト曲線）が導かれるであろう。

$$Y=K\int_{-\infty}^{\alpha+\beta\log X}\frac{e^X}{(1+e^X)^2}\,dx \quad \cdots\cdots(3)$$

$$=KP(X)$$

(3)式における所得弾力性 E_X は次のようになる。

$$E_X=\beta Q, \qquad Q=1-P(X)$$

三、修正されたテルンクビスト曲線の推定

(3)式を誤差項 ε を含む式に直し、ε は所得 X には独立、且し一定の分散をもつ正規分布に従うものと仮定する。

$$Y=KP(X)+\varepsilon \quad \cdots\cdots(4)$$

この仮定の下で、パラメーター K, α, 並び β の最尤解を求める。シグモイド型の場合と同じく、直接的な推定値が得られないので、反覆的に求めてゆくことになる。[1] 反覆操作の詳しいことはP・Rフィスクの論文（*Reviw of Economic Studies*, Oct. 1958. pp.33~51）にあるので茲では初期値 K_0, α_0, β_0 の定め方だけ述べておく。先ず K_0 を guesswork で求める。次いで $p_0=Y/K_0$, $r=2p_0-1$ を計算して統計数値表にある「Z——変換表」を用いて r に対するZを求める。若し K_0 が正しく推定されておれば $2Z$ と $log_e X$ の間には直線的関係が出てくるだろう。[2] 若し著しく非直線的関係が認められるならば K_0 の値を改訂して計算し直す。こうした後で直線的回帰式

$$2Z=\alpha+\beta\ log_e\ X$$

をフィットする。この過程は図式的に行なうだけで充分である。図上でパラメターを定め、これを初期値の α_0, β_0 とする。

〔註一〕

一般的に考えて、互に独立なサンプル x_i, $i=1.2\cdots\cdots n$ の密度函数を $f(x_i;\ \theta_i,\cdots\cdots\theta_s)$, と表わすと、パラメーター$\theta_1\cdots\cdots\theta_s$の最尤推定値 $T_1\cdots\cdots T_s$ は次の聯立方程式をS個のパラメータについて解くことにより求められる。

$$\frac{\partial L}{\partial\theta i}=0,\qquad i=1,\ 2\cdots s\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

但し $L=log\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta_1\ \cdots\cdots\theta_s)$

従って

$$\frac{\partial L(T_1,\ T_2,\cdots T_s)}{\partial\theta_i}=0\qquad(i=1,\ 2\cdots\cdots s)\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

今$\theta_1\cdots\theta_2$の初期値をt_iとして $T_i=t_i+\delta t_i$ とおけば(6)式をt_iの近傍で第二次の項まで展開して

$$\sum_{j=1}^{s} L_{ij}\delta t_j = -L_i \quad (i=1\cdots s) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

但し

$$Li = \frac{\partial L}{\partial \theta_i}(t_1,\ t_2\ldots), \quad L_{ij} = \frac{\partial L(t_1,\ t_2,\cdots)}{\partial \theta_i\, \partial \theta_j}, \quad (i\ j=1,\ 2\ldots s)$$

(7)式を解いて修正量の δt_i を得る。次いで $t_i+\delta t_i$ を第二回目の近似値として上記と同じような操作で修正値を求めて行く。

なお L_{ij} $(x_1\cdots x_n,\ t_1,\cdots t_s)$ において x_i の代りにその期待値 E $(x_i/\theta_i=t_i)$ を代入したものを Λ_{ij} とすると、修正量 δt_i は次式を解いて求めてもよい。

$$\sum_{j=1}^{s} \Lambda_{ij}\delta t_j = -L_i \quad (j=1,\ 2\ldots s) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

修正されたテルンクビスト曲線のパラメータ K. α. β を反覆的に求めるためには

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(Y-\hat{Y})^2\right\}$$

$$\hat{Y} = K\int_{-\infty}^{\alpha+\beta x} \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx, \quad x = LogX.$$

とおけばよい。

〔註二〕

$$P=\int_{-\infty}^{\alpha+\beta x}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$$

とすると

$$\log_e\frac{P}{1-P}=\alpha+\beta x$$
$$=2Z$$

適　用　例

農林省統計調査部調整課で行なった都市家計の食糧需要の分析結果と比較できるように、同一のデータを用いることにした（統計分析資料第二九号）。即ちデータは『総理府都市家計調査』の昭和三二年の三月、六月、一一月の三カ月平均で現金支出階層別一人当り購入金額である。支出階層のうち、最下層の四、〇〇〇円未満と最高層の八〇、〇〇〇円以上の階層は除外されている。所得変数として各支出階層の中央値を用いた点も上記の分析例と同様である。なおデータが階級別になっているので、最尤解を反覆法で求める際のウェイトに（Wi）は次のものを使わねばならぬ。

$W_i=n_i\ (P_i\ Q_i)^2$,　n_i は i 番目階層の標本世帯数.

内地米（配給を含む）の例

初期値は $K_0=1000$円, $\alpha_0=-6.71$, $\beta_0=0.86$ であった。修正量 $d\alpha$, $d\beta$, dk/k は第一表の通りである。

採用した推定値は

$K=849.8$円.　$\alpha=-6.67$.　$\beta=0.92$

である。一方、農林省統計調査部の計測によると

$$Y = -644 + 355 \log X$$

$$\log Y = 1,950 + 0.236 \log X$$

X：1人当り総支出金額(円)　Y：1人当り支出額(円).

なお内地米に外米、もち米を加えた米消費総額について、次の如きテルンクビスト型の曲線の当てはめが行なわれている（統計調査部、統計分析資料、第三八号）。

$$Y = 870/X + 1,230$$

前述の二式及び修正されたテルンクビスト曲線は各階層の世帯標本数によるウェイトを考慮して、当てはめられているが、上記の〃修正なし〃のテルンビクスト曲線は非加重で計測されている点に注意されたい。第一図は修正されたテルンクビスト曲線を Semi-Log のグラフと比較して描いたものである。牛乳の場合もそうであるが、両者のギャップは観察された所得の巾を超えると著しくなっている。平均点の近傍では殆んどギャップは見られない。この点は P・R フィスクの計測例でも同様であった。当てはまりの程度は Semi-Log と殆んど同じである。

牛乳の例

表1表　最尤法によるパラメータの反覆的推定

	修正量			修正後の推定値		
	$d\alpha$	$d\beta$	$\frac{dk}{k}$	α	β	k
内地米：						
第一回	−0.10	+0.05	−0.1169	−6.81	−0.91	883.1
第二回	+0.04	+0.01	−0.0376	−6.67	−0.92	849.8
牛　乳：						
第一回	−4.12	+0.47	−0.24	−19.75	+2.23	94.1
第二回	+1.58	−0.24	+0.34	−18.17	+1.99	125.9
第三回	+2.03	−0.15	−0.029	−16.14	+1.84	122.2

初期値は

$k_0=124$円, $\beta_0=6.76$, $\alpha_0=-15.63$

採用した推定値は

$k=122.2$円, $\beta=1.84$, $\alpha=-16.14$

である。一方農林省統計調査部の計測によると

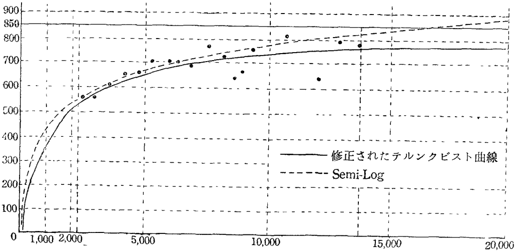
$Y=-409+123\log X$,

$\log Y=-3,497+1,382\log X$

平均所得（一人当り、4,770円）の点で求めた所得弾力性は第二表の如くである。弾力性の減少程度を示すために、所得二、五〇〇円と一〇、〇〇〇円の点の弾力性を掲げておいた。

第三表では修正されたテルンクビスト曲線のパラメター、K, α, β の推定値の標準誤差を括孤で包んだ値で示してある。ある限度以上の所得に対しては $P(x)$ は主として α の大いさにより決まってしまう。α の絶対値が大いなるに従って $P(x)$ は減少し、飽和点Kとの距りが

第１図　内地米（昭和32年）の修正されたテルンクビスト曲線とSemi-Log



第２表　所得弾力性：内地米及び牛乳

所得（１人当り）	内地米 修正されたテルンクビスト	内地米 Semi-Log	内地米 Double-Log	牛乳 修正されたテルンクビスト	牛乳 Semi-Log	牛乳 Double-Log
2,500円	0.34	0.27		1.57	5.98	
平均所得(4,770円)	0.24	0.23	0.236	1.16	1.28	1.382
10,000円	0.14	0.20		0.57	0.64	

増す。例えば平均所得における $P(x)$ は牛乳では 0.37 内地米では 0.75 になっている。

第3表　推定値の標準誤差：内地米及び牛乳

	k	α	β
内　地　米	円 849.8 (3.3)	−6.67 (0.07)	0.92 (0.03)
牛　　　乳	円 122.2 (9.3)	−16.14 (0.09)	1.84 (0.02)