クロス・セクション分析への新らたな接近方法（I）

―― Diffusion Process の適用 ――

三 枝 義 清

一　問　題

所得や企業規模等の Economic Variable の分布の問題は、エコノメトリックスの対象とする課題の一つである。所得―消費の関係をクロス・セクション分析で統計的に把握しようとすることは、二次元分布における回帰関係として計測しようとしているのであるから、クロス・セクション分析も基本的には上記の分布問題と同系列のものと考えられる。しかし通常のクロス・セクション分析では回帰関係のみが興味の中心となり、それを生成している母集団分布に関しては殆んど無関心である。クロス・セクション分析においてもその基礎になっている分布についてより関心をもつべきであるというのがここでの第一の主張である。クロス・セクション分析において回帰関係を定式化しようとする場合、われわれは幾くつかの標準的な数式を念頭に浮かべる。例えば一次式、double-log, semi-log. etc. そのいずれの型がよりよく適合しているかを検討することは確かに大切な作業であるが、更に重要な

ことは、仮りに double-log で回帰関係が表現されているものとしたら――その生成過程を分析することだろう。でなければクロス・セクション分析は統計的な回帰分析の練習問題に過ぎなくなる。Aitchson と Brown[1] がシグモイド型の需要関数を提唱する根拠については議論があろうが、従来の業績と区別される点は、その生成過程について一つのモデルを用意していることであると思う。

ここで採り上げる問題を要約すると次の通りである。――クロス・セクション分析で見出される所得――消費の回帰関係の生成について一つのモデルを提示することである。接近方法は従来のものと異なり、Economic Variable の分布の形成を論ずる際の手法と類似のものを採用する。すなわち回帰関係よりも、むしろ所得消費の結合分布に注目し、その生成のプロセスを対象にする。

四および五に示めす結果から知れるように結合分布を特徴づけるパラメターは time(t) を含む関数、従って回帰式に現われるパラメターも t の関数になってくる。最近、クロス・セクションデータの時系列分析を対象にした計測例が、いくつか発表されている。[2][3][4] ここで取り扱う問題はこれらの計測例とも密接な関連を持っているので、始めに簡単に触れておきたい。

計測（2）では昭和二八～三五年までの家計調査の五分位データをプールして次の結果を導いている（変数はいずれも対数に変換してある)。

食料費　$E_f=0.99818+0.46608Y+0.42491T$

雑　費　$E_m=-0.51159+1.54265Y-1.35910T$

計測（3）によると

総消費　$C=(3,244.9+252.2t)+(0.719+0.009t)Y$

食　料　$C=(5,048.5+159.4t)+(0.197-0.005t)Y$

主　食　$C=(2,839.3+13.5t)+(0.036-0.0024t)Y$

非主食　$C=(2,217.3+145.1t)+(0.161-0.0026t)Y$

住　居　$C=(131.9+51.5t)+(0.044+0.0059t)Y$

光　熱　$C=(701.4-56.8t)+(0.021+0.0017t)Y$

被　服　$C=(-249.8-15.4t)+(0.134-0.0025t)Y$

雑　費　$C=(-1,794.3+76.0t)+(0.370-0.0072t)Y$

これらは家計調査データ（昭和三〇～三四年）を経企庁経済研究所が再集計した結果をもとにして導き出されたものである。この種の時系列分析には常に time(t) を含むパラメターがなんらかの形で回帰関係の中に現われてくるだろう。計測（２）では回帰係数は年次間を通じて Const. におき、time(t) は説明変数として現われている。この説明変数の効果はかなり顕著である。しかし、この変数(t)の役割をどのように解釈したらよろしいのか?。所得要因以外の、計測に洩れたその他変換の合成的効果とみるのか、それとも潜在的なある特定要因の反映とみなすのか、等々 time(t) の項に関しては様々の疑問が生じよう。計測(３)の常数項も性格としては計測（２)の time の項と同等である。

Prais と Houthakker(5) や Aitchson と Brown(1) がクロス・セクションの所得—消費関係の各種の formulation を述べているが、対象としているのは一時点におけるクロス・セクション分析を念頭においているので、

time(t) の処理については考慮を払う必要はなかった。しかしクロス・セクションデータの時系列的分析を行なおうとすると新らたな問題が発生してくる。time(t) をどのように所得—消費関係に挿入すべきかは、時間的経過に伴う各消費者の反応をどのようなモデルで表現するかが定まらない限り、確定しない。一方各パラメターの時間的変化の型を試行錯誤的に探し出すのも一つの接近方法であろうが、最終結果を説得しうるためには、それに見合うところのなんらかのモデルが用意されなければならないだろう。

ここでは所得—消費の結合分布の形成を確率的な diffusion process として把握しようとしている。従って marginal な分布として得られる所得分布も diffusion process として理解しているわけであるから、所得分布の形成を確率的なマルコフ過程として捕らえることへの批判が、そのまま、ここでの接近方法にも当て嵌まるわけである。

二　選移確率系について

ある時点(n)における個々の消費者の状態をベクトル量の $X_{(n)}$ で表わそう。

$$X_{(n)}=(x_{1(n)}, x_{2(n)}),\quad n=0.1\ 2\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

x_1, x_2 はそれぞれ所得および消費量を示めす。

単位期間を経過した次の時点 $(n+1)$ の状態を $x_{(n+1)}$ とすると、$X_{(n+1)}$ は $X_{(n)}$ と同一のこともあろうし、または変化することもあろう。ここでは、時点(n)で状態 $X_{(n)}$ であったものが、時点 $(n+1)$ でいずれの状態に移るかは確率的にのみ定められているものと考える。個々の消費者の状態の時間的経過は $X_{(0)}, X_{(1)}, \cdots X_{(n)}\cdots$ なる確率変数の時系列として表現されることになるが、ここでは次のような性質をもつところのマルコフ過程に限定し

てみる。

$$P_r\{X_{(n+1)}=(i_1, i_2)\,|\,X_{(n)}=(j_1, j_2)\quad X_{(0)}=(l_1, l_2)\} \qquad (2)$$

$$=P_r\{X_{(n+1)}=(i_1, i_2)\,|\,X_{(n)}=(j_1, j_2)\} \qquad (3)$$

$$\equiv P_{(i_1,i_2)(j_1,j_2)}\equiv P_{ij} \qquad (4)$$

(2)〜(4)では x_1, x_2 はいずれも離散的な量で、i および j 等は 0.1.2・の値をとるものと考えている。(3)より知れるように、時点（$n+1$）で状態（i_1, i_2）が実現する確率は、時点（n）の状態がどうであったかということにのみ依存し、それ以前の状態の履歴効果は存在しないものと想定している。(4)式で示めした P_{ij} はマルコフ過程論では遷移確率（transition probability）と呼ばれている。すべての（i,j）の組について遷移確率の値を定めることにより——すなわち一つの遷移確率系が指定されれば——初期状態だけを知っておけば $\{X_{(n)}\}$ の時間的経過は確率的に規定されてしまうことになる。従来のクロス・セクション分析では個々の消費者（d 番目の）について次の関係式を想定しているが、

$$f^{(d)}(x_{1(n)}, x_{2(n)}, \varepsilon_{(n)})=0 \quad \varepsilon\text{は誤差項}$$

ここでの接近法ではその代りに上記の遷移確率素が中心的な役割を演ずることになる。上の説明で明らかなように所得—消費関係の時間的経過は遷移確率系 $\{P_{ij}\}$ で規定されてしまうわけであるから、$\{P_{ij}\}$ を所得—消費のパターンと考えてもよい。

三　Diffusion Process について

(2)節では時間および状態を定める変量をいずれも離散的な量と考えたが、両者とも連続量として扱った方が解析的には便利である。説明を簡単にするために最初に一次元の変量についての連続的過程の取扱いを述べる。先ず選移確率を次の如く定める。

X_t は一次元の変量で $-\infty < X_t < +\infty$。

$$P_r\{X_t \leq x \mid X_s = v\} \equiv F(s, v\,;t, x) \quad (s<t) \quad \cdots\cdots (6)$$

$F(s, v\,;t, x)$ は x に関して絶対連続であると想定すると次の如く表わせる。

$$F(s, v\,;t, x) = \int_{-\infty}^{x} f(s, v\,;t, x)dx \quad \cdots\cdots (7)$$

ここで

$$f(s, v\,;t, x) \geqq 0 \text{ かつ } \int_{-\infty}^{\infty} f(s, v\,;t, x)dx = 1 \quad \cdots\cdots (8)$$

$f(s, v\,;t, x)$ は選移確率密度関数と呼ばれている。この関数 f につき次の諸性質（a～d）が満足されるものと想定する。

（a）$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-v| \geqq \delta} f(t, v\,;t+\Delta t, x)dx = 0 \quad \cdots\cdots (9)$$

（b）$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|n-v| < \delta} (x-v) f(t, v\,;t+\Delta t, x)dx = a(t, v) \quad \cdots\cdots (10)$$

（c）$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|x-v| < \delta} (x-v)^2 f(t, v\,;t+\Delta t, x)dx = b(t, v) > 0 \quad \cdots\cdots (11)$$

(a)の示めす性質は、$X_t=v$ であった時、微小期間 Δt の間で $|X_t-X_{t+\Delta t}|\geqq\delta$ なる変化が生ずる確率は Δt に比らべて小さいということである。(b)、(c)は $X_t=v$ であった時、微小期間に生ずる変化量について平均および分散の存在を仮定するものであり、X_t の変化に関する infinitismal mean および variance と呼ばれている。一般には t および v の値に依存するであろう。

(d) 更に次の偏導関数が存在し、かつ v の連続関数であるとする。

$$\frac{\partial f(s,v;t,x)}{\partial v},\quad \frac{\partial^2 f(s,v;t,x)}{\partial v^2} \quad \cdots\cdots(12)$$

以上の(a)〜(d)の諸性質を $f(s,v;t,x)$ が満足するものとすると、選移確率密度関数 f は次の偏微分方程式(13)の解であることが証明されている。(6)

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2[b(t,x)f]}{\partial x^2}-\frac{\partial[a(t,x)f]}{\partial x} \quad ただし\ f=f(s,v;t,x) \quad \cdots\cdots(13)$$

従って、$a(t,x)$ および $b(t,x)$ を指定しておけば方程式(13)を満足する解 f を求めることにより、特定の選移確率関数を得ることが出来る。偏微分方程式(13)は Kolmogorov diffusion equation とも呼ばれている。

多次元への拡張は直接的である。$X(t)=(X_1(t),X_2(t))$ の選移確率を次式で表わし、

$$P_r\{X_1(t)<x_1, X_2(t)<x_2 \mid X_1(s)=v_1, X_2(s)=v_2\}=F(s,v_1,v_2,t,x_1,x_2),\ t>s \quad \cdots\cdots(14)$$

かつ選移確率密度関数 $f(s,v_1,v_2;t,x_1,x_2)$ が存在するものとする。すなわち

$$f(s,v_1,v_2;t,x_1,x_2)=\frac{\partial^2 F(s,v_1,v_2;t,x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2} \quad \cdots\cdots(15)$$

遷移確率密度関数fは次の diffusion equation の解である。

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2[b_{ij}(t,x_1,x_2)f]}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial[a_i(t,x_2,x_2)f]}{\partial x_i}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

ただし $f(s,v_2,v_2,t,x_1,x_2)$ は一次元の場合の(a)〜(d)に準じた諸性質を満足することが要請されている。例えば(16)式の $a_i(t,x_1,x_2)$ は一次元の(10)と同じく $X_i(t)$ の変化に関する infinitismal mean で次式で与えられる。

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{R\delta}(y_i-x_i)f(t,x_1,x_2\,;t+\Delta t,y_1,y_2)dy_1dy_2=\underset{i=1\ 2}{a_i(t,x_1,x_2)}\quad\cdots\cdots\cdots(17)$$

$b_{ij}(t,x_1,x_2)$ は infinitiomal variance および Covariance で次式で与えられる。

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_{,\delta}(y_i-x_i)(y_j-x_i)f(t,x_1,x_2\,;t+\Delta t,y_1,y_2)dy_1dy_2=\underset{i,j=1\ 2}{b_{ij}(t,x_1,x_2)}\cdots\cdots\cdots(18)$$

ここで R_δ は (x_1,x_2) を中心にもつ半径（δ）の二次元での球である。

四　所得—消費の結合分布の一例

(16)式の diffusion equation において、$a_i(t,x_1,x_2)$ および $b_{ij}(t,x_1,x_2),i,j=1,2$ の関数形を指定すれば方程式6)(1を解くことにより、特定の遷移確率関数を求めることが出来る。以下、x_1は消費者の所得を、x_2は消費量を表わすものとしよう。$a_i(t,x_1,x_2)$ および $b_{ij}(t,x_1,x_2)$ がどの様な関数系をもつものなのか正確にはわれわれはアプリオリに知ることは出来ないであろう。われわれが直接観測しうるものは各時点の所得、消費の結合分布がどうなっているかということだけである。従って現実に近い分布を生成しうるように、かつ比較的簡単で意味のある関数系を

想定してゆくことになる。

一つの試みとして、次のような想定をしてみよう。

(イ) $a_1(t, x_1, x_2)=r_1-\alpha_1 x_1$ ……(19)

$a_2(t, x_1, x_2)=r_2-\alpha_2 x_2,$ 　ここで $\alpha_1, \alpha_2>0$

ただし Original な変数を対数変換して、これを x_1 および x_2 と表わすものとする。従って、もし $\alpha_1=0$ とすれば t 点の所得の infinitismal change (変化率) は平均的には t 時点の所得の大いさのいかんに拘らず一定となるが、$\alpha_1>0$ と考えているので所得規模が増大するにつれて、infinitismal change の平均は減少することになる。消費の例についても同様の仮定を設けてある。

(ロ) $b_{11}(t, x_1, x_2)=\sigma_1{}^2$

$b_{22}(t, x_1, x_2)=\sigma_2{}^2$ ……(20)

$b_{12}(t, x_1, x_2)=\sigma_{12}$

すなわち infinitirmal change の Variance および Covariance は所得および消費の規模に関せず一定と想定する。なお、(19)、(20)式に見られるように、いずれのパラメターも time に依存していない点に留意されたい。

(イ) および (ロ) の想定の下で、$s=0$ とおくと diffusion equation (16) は、次の如く書き改められるであろう。

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\sigma_1{}^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}+\sigma_{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\sigma_2{}^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2}-\frac{\partial}{\partial x_1}[(r_1-\alpha_1 x_1)f]-\frac{\partial}{\partial x_2}[(r_2-\alpha_2 x_2)f] \cdot \quad (21)$$

ここで　$f=f(o, v_1, v_2\,; t, x_1, x_2)$

偏微分方程式(21)の解として次の(22)式に示めすfが得られる。

$$f=\frac{1}{2\pi\sigma_{1(t)}\sigma_{2(t)}\sqrt{1-\rho^2_{(t)}}}\ \exp\left[-\frac{1}{2}Q(x_1, x_2)\right] \quad \cdots\cdots \quad (22)$$

ただし

$$Q(x_1, x_2)=\frac{1}{1-\rho^2_{(t)}}\left[\left(\frac{x_1-m_1(t)}{\sigma_1(t)}\right)^2+\left(\frac{x_2-m_2(t)}{\sigma_2(t)}\right)^2-2\rho_{(t)}\frac{(x_1-m_1(t))(x_2-m_2(t))}{\sigma_1(t)\sigma_2(t)}\right]$$

$$m_i(t)=r_i/\alpha_i+e^{-\alpha_i t}(v_i-r_i/\alpha_i) \quad i=1, 2$$

$$\sigma^2_{i(t)}=\frac{\sigma_i^2}{2\alpha_i}(1-e^{-2\alpha_i t})$$

$$\sigma_{12}(t)=\frac{\sigma_{12}}{(\alpha_1+\alpha_2)}(1-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t})$$

$$\rho(t)=\sigma_{12}(t)/\sigma_1(t)\sigma_2(t)$$

(22)式より次のことが知れる――(イ)、(ロ)を想定すると、$t=0$ の時 $X_{(0)}=(v_1, v_2)$ であったものが、t 時点において $x_1<X_1(t)<x_1+dx_1, x_2<X_2(t)<x_2+dx_2$ となる確率は、平均 $(m_1(t), m_2(t))$、分散 $(\sigma_1^2(t), \sigma_2^2(t),)$ および共分散 $\sigma_{12}(t)$ をもつところの二次元の正規分布で表現される。Original な変量で述べると、二次元の対数正規分布をするということである。(22)式は $X_{(0)}=(v_1, v_2)$ であった時の $X(t)$ の条件付確率を表わしているが、$t=0$ における $X_{(0)}$ の Initial distribution を指定することにより t 時点における $X(t)=(X_1(t), X_2(t))$ の結合分布が得

られる。例えば $X_{(0)}=(v_1, v_2)$ の平均を $(m_{1(0)}, m_{2(0)})$、分散および共分散を $\sigma^2_{1(0)}, \sigma^2_{2(0)}$ および $\sigma_{12(0)}$ と記すと、$X(t)=(X_1(t), X_2(t))$ の確率密度関数は：

平均が

$$m_i(t)=\frac{r_i}{\alpha_i}+e^{-\alpha_i t}\left(m_{i(0)}-\frac{r_i}{\alpha_i}\right) \quad i=1.2$$

分散が

$$\sigma^2_{i(t)}=\frac{\sigma_i^2}{2\alpha_i}(1-e^{-2\alpha_i t})+\sigma^2_{i(0)}e^{-2\alpha_i t} \qquad i=1.2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (23)$$

$$\sigma_{12(t)}=\frac{\sigma_{12}}{\alpha_1+\alpha_2}(1-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t})+\sigma_{12(0)}e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}$$

をもつところの正規関数となる。

所得分布は、上記の結合分布の marginal distrbiution として導かれるわけであるから、以上のモデルで生成される所得分布は対数正規型の分布になることが判かる。

(23)式より知れる第二の重要な性質は、所得―消費の結合分布は time(t) と共に変化するが、定常的な極限分布が存在しているということである。すなわち、$t\to S$ とすると平均や分散等のパラメターは単調にある極限値に収斂してゆく。例えば

$$m_i(t)\longrightarrow\frac{r_i}{\alpha_i}\equiv m_i(S) \quad (i=1.2) \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (24)$$

$$\sigma_i^2(t) \longrightarrow \frac{\sigma_i^2}{2\alpha_i}, \equiv \sigma_i^2(\infty), \sigma_{12} \longrightarrow \frac{\sigma_{12}}{\alpha_1+\alpha_2} \equiv \sigma_{12}(\infty)$$

かつ極限分布は、$t=0$ における Initial distribution に依存しないことか判かる。

四節では $a_i(t, x_1, x_2), b_{ij}(t, x_1, x_2)$ を（イ）、（ロ）の如く想定して遷移確率密度関数を求めたが、（イ）（ロ）以外にいろいろの関数型が考えられるであろう。この点についての検討は次回に譲り、以下(23)式で求めた所得―消費の結合分布を基にしてクロス・セクショナルな回帰関係の性質の検討を行なうことにする。

五　消費―所得の回帰式について

結合分布は正規分布であるからこの場合には当然回帰式は linear になる。Original な変数でいえば double-log 型で表現されることになる。t 時点の回帰式を $R(t)$ で記せば

$$R(t) : \tilde{x}_2(t) = (m_2(t) - \beta(t) m_1(t)) + \beta(t) x_1(t) \quad \cdots\cdots (25)$$

$$= K(t) + \beta(t) x_1(t), \quad ここで \quad \beta(t) = \frac{\sigma_{12}(t)}{\sigma_1^2(t)}$$

定常的な回帰直線 $R(\infty)$ は(24)式より知れるように

$$R(\infty) : \tilde{x}_2 = K(\infty) + \beta(\infty) x_1 \quad \cdots\cdots (26)$$

ここで

$$\beta(\infty) = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2} \cdot \frac{2\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}$$

$$K(\infty)=\frac{r_2}{\alpha_2}-\beta(\infty)\cdot\frac{r_1}{\alpha_1}$$

次に平均値 $m_i(t)$、回帰係数 $\beta(t)$ および常数項 $K(t)$ の時間的変化を検討してみる。

（a） 平均値 $\boldsymbol{m_1(t), m_2(t)}$ の時間的経路

(23)式より知れるように

$$\left.\begin{array}{l} m_1(t)=m_1(\infty)-e^{-\alpha_1 t}(m_{1(\infty)}-m_{1(0)})\ :\ m_{1(\infty)}=r_1/\alpha_1 \\ m_2(t)=m_{2(\infty)}-e^{-\alpha_2 t}(m_{2(\infty)}-m_{2(0)})\ :\ m_{2(\infty)}=r_2/\alpha_2 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(27)$$

以下の議論では $m_{1(\infty)}>m_{1(0)}, m_{2(\infty)}>m_{2(0)}$ と仮定しておく。直ちに次式が得られる。

$$\frac{dm_1(t)}{dt}=\alpha_i e^{-\alpha_i t}(m_{i(\infty)}-m_{i(0)})=\alpha_i(m_{i(\infty)}-m_{i(t)})>0 \quad (i=1.2) \quad \cdots\cdots(28)$$

すなわち増加率は、t と共に減少してゆく。(28)式を需要分析のモデルでいえば、$m_{(\infty)}$ は潜在需要の総量を表わし、増加率は、残存している潜在需要に比例する、という関係を表わしている。時系列的な所得弾力性は、次の dm_2/dm_1 で表現しえよう。

$$\frac{dm_2}{dm_1}=\frac{\alpha_2(m_{2(\infty)}-m_{2(t)})}{\alpha_1(m_{1(\infty)}-m_{1(t)})}=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{(m_{2(\infty)}-m_{2(0)})}{(m_{1(\infty)}-m_{1(0)})}\cdot e^{(\alpha_1-\alpha_2)t}>0 \quad (29)$$

なお

$$\frac{d^2m_2}{dm_1{}^2}=e^{(2\alpha_1-\alpha_2)t}\left\{\frac{\alpha_2}{\alpha_1{}^2}\frac{(\alpha_1-\alpha_2)(m_{2(\infty)}-m_{2(0)})}{(m_{1(\infty)}-m_{1(0)})^2}\right\} \quad \cdots\cdots(30)$$

であるから、関数 $m_2=f(m_1)$ は $\alpha_1>\alpha_2$ であれば上に凹の増加関数となる。$\alpha_1=\alpha_2$ であれば当然 linear になる(図1参照)。

〔附記〕 m_1 および m_2 は Original な変数を対数変換したものについての平均値であることに注意されたい。Original な変数についての平均値を μ_1, μ_2 とすれば、m_1, m_2 との間には次の関係がある。

$$\log\mu_1(t)=m_1(t)+\frac{\sigma_1^2(t)}{2} \quad \cdots\cdots(31)$$

$$\log\mu_2(t)=m_2(t)+\frac{\sigma_2^2(t)}{2}$$

従って、$\sigma_{12}(t)$ および $\sigma_2^2(t)$ が time-independent であれば

$$\frac{d\{\log\mu_2\}}{d\{\log\mu_1\}}=\frac{dm_2}{dm_1}$$

となる。

以上のモデルによれば、マクロ的な消費―所得の関係、従って時系列的な所得弾力性値は、主としてパラメターの α_i および r_i ($i=1.2$) で定まり、一般には、クロス・セクショナルな所得弾力性値 $\beta(t)$ とは違った値を示めすことになる。

(b) 回帰係数 $\beta(t)$ の変化

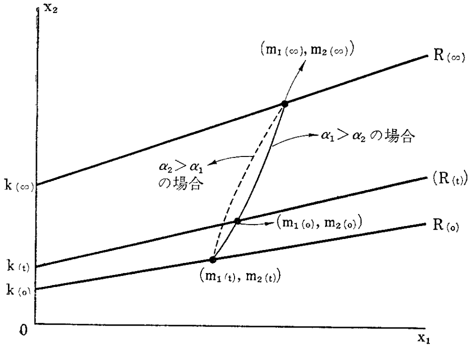

図1　消費―所得の回帰関係

(23)式および(24)式によると $\beta(t)$ は次の如く表わせる。

$$\beta(t)=\beta(\infty)\frac{1-e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}A}{1-e^{-2\alpha_1 t}B}, \quad \text{ただし} \quad A=\frac{\sigma_{12(\infty)}-\sigma_{12(0)}}{\sigma_{12(\infty)}} \cdots\cdots (32)$$

$$B=\frac{\sigma^2_{1(\infty)}-\sigma^2_{1(0)}}{\sigma^2_{1(\infty)}}$$

従って、$A=B=0$ であれば $\beta(t)=\mathrm{Const}=\beta(\infty)$。

(c) 常数項 $K(t)$ の変化

$K(t)$ の変化は、平均値 $m_i(t)$ の時間的経路および $\beta(t)$ の変化で規定されるが、特に $\beta(t)=\mathrm{Const}=\beta(\infty)$ として、$K(t)$ の変化を検討してみよう。

$$\frac{dK(t)}{dt}=\frac{dm_1(t)}{dt}\left\{\frac{dm_2(t)}{dm_1(t)}-\beta\right\} \cdots\cdots (33)$$

$$=\alpha_2(m_{2(\infty)}-m_{2(t)})-\beta\alpha_1(m_{1(\infty)}-m_{1(t)}) \cdots\cdots (33)'$$

より知れるように

$$\frac{dm_2(t)}{dm_1(t)} \gtreqless \beta \text{ 応じて } \frac{dK(t)}{dt} \gtreqless 0 \cdots\cdots (34)$$

である。特に $\alpha_1=\alpha_2$ の時には $\frac{dK(t)}{dt}=0$ となり、$K(t)$ はシフトせず、$dm_2(t)/dm_1(t)=\beta$ となる。

$\beta<\frac{dm_2(t)}{dm_1(t)}$ の場合には $K(t)$ は増加するが、

$$\begin{cases} \alpha_2 > \alpha_1 \quad \text{であれば} \quad \dfrac{d^2K(t)}{d^2t} < 0 & \cdots\cdots \\ \alpha_2 < \alpha_1 \quad \text{〃} \quad \alpha_1/\alpha_2 \leqq \beta^{-1}\dfrac{dm_2(t)}{dm_1(t)} \quad \text{に応じて} \quad \dfrac{d^2K(t)}{dt^2} \lesseqgtr 0 \end{cases} \quad (35)$$

逆に $\beta > \dfrac{dm_2(t)}{dm_1(t)}$ の場合には

$$\begin{cases} \alpha_2 < \alpha_1 \quad \text{であれば} \quad \dfrac{d^2K(t)}{dt^2} > 0 & \cdots\cdots \\ \alpha_2 > \alpha_1 \quad \text{〃} \quad \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} \leqq \beta\Big/\left(\dfrac{dm_2(t)}{dm_1(t)}\right) \quad \text{に応じて} \quad \dfrac{d^2K(t)}{dt^2} \lesseqgtr 0 \end{cases} \quad (36)$$

ここで留意すべきことは、常数項 $K(t)$ は、パラメターの $\alpha_i, r_i (i=1.2)$ に変化がなくとも、一般には、定常値 $K(\infty)$ に達するまで時間的経過につれて変動するという点である。

以上述べたモデルはいろいろの点で単純化が行なわれているので、これがそのまま実際に適用しうる範囲は限定されるであろう。例えば所得および消費の $m_i(t)$ は、(28)式に示めしたように増加率は時間と共に単調に減少してゆく。

このような型の消費項目もありうるし、また一般的傾向として所得の成長もこのような型に従うであろう。しかし逆に期間によっては増加率が増大するケースがしばしば発生する。これまで述べた単純なモデルの修正は次の章に譲りたい。

注（1） Aitchson and Brown *Log-normal distribution*

（2）中山誠記「食料需要予測における所得要因と非所得要因について」（季刊『農業総合研究』第一六巻四号、昭和三七年一〇月）。
（3）荒井豊「消費のクロスセクション・データによる時系列変動の推計」（『経済分析』第五号、昭和三六年一〇月）。
（4）溝口敏行「共分散分析による家計消費支出の分析」（『経済研究』第一〇巻二号、一九五九年）。
（5）S. J. Prais and H S. Houthakker. *The Analysis of Family Budgets.*
（6）Bharucha-Reid. *Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications.*

（研　究　員）