牛乳生産構造の一側面

――分娩頭数系列について――

三枝義清

一　問題

短期的な予測を主眼としている現在の『牛乳生産量予察調査』（農林省統計調査部）やその改善案では、各月の分娩頭数の分析は余り問題にならない。「予察調査」では分娩頭数を農家のきき取りを基にして直接予測しているし、また改善案では今月の出生頭数（従って分娩頭数）が既知であれば、少なくとも次年度におけるその月の搾乳頭数は予測できる体系になっている。従って各月の分娩頭数の系列を生成する過程をどのように定式化するかは、第二次的な問題となる。然し視点をより遠い将来の頭数予測に転ずると、いろいろの問題が生じてくる。いずれの方式を採用するにせよ、何んらかの形で分娩頭数系列の問題に遭遇するであろう。この論文のもう一つの狙いとして次の様な問題がある。以下の接近方法で中心的な役割を演じているのは、二つの系列を結びつけるところの、影響関数ないし伝達関数である。牛乳生産構造を構成している系列には、分娩頭数系列以外に屠殺頭数・搾乳頭数・経産頭数

等々多数あるがこれらの系列を関係づけるものとして、いくつかの伝達関数が考えられる。ここでは分娩頭数系列を対称にして、そこで表われる伝達関数の処理を論じたい。

二　分娩頭数系列の生成について

経産牛と未経産牛を区別して考えねばならぬ。分娩系列の変動を説明する方法としてはいろいろのものが考えられようが、頭数系列を生成する体系としては出来るだけ自律性をもつこと、ないしそれ自体で完結しうることが望ましい。実際には各種の経済的要因が頭数系列の変動に影響を及ぼしているわけであるから、最終のモデルとしては経済的要因を陽表的に採り入れたものでなければならない。然しこの論文ではこれらの経済的要因をどのように定式化するかの問題には触れずに議論を進めて行く。

イ　経産牛の分娩頭数

乳牛の懐妊期間をt_0カ月と記す。懐妊期間の個体差は無視しうる程度であるから、懐妊期間中の損耗をゼロとみなせば、ある月の分娩頭数（経産牛の）Y_tはそのままt_0カ月前の月において受胎した頭数に均しくなければならぬ。

一方、ある特定な月における受胎頭数は、それ以前の月における分娩頭数（経産牛、未経産牛を合せた）がどの様な頻度で次の種付けを行なうかに依存する。分娩時点より次の受胎までの期間をiカ月と記す。当然この期間は個体により変動するから、ある確率分布に従う変量と考えねばならぬ。そこで、受胎までの期間がiカ月である確率を$P_{(i)}$と記すと、経産牛の分娩系列$\{Y_t\}$は次の様に表現できるわけである。

$$Y_t=\sum_{i=0}^{S} P_{(i)} X_{t-t_0-i} \quad \cdots\cdots(1)$$

ここで X_{t-t_0-i} は (t_0+i) カ月以前の月における分娩総頭数（経産牛・未経産牛を合せた）．

(1)式では受胎より分娩までの期間で生じうる搾乳牛の損耗を無視したが、この期間中の損耗率を β とすると次式の様に修正される。

$$Y_t=\beta\sum_{i=0}^{S} P_{(i)} X_{t-t_0-i} \quad \cdots\cdots(2)$$

$\{Y_t\}$ や $\{X_t\}$ の頭数系列は「予察調査」で昭和三三年以降（但し Y_t は昭和三六年一一月以降）推定されているが、β や $\{P_{(i)}\}$ を直接測かったデータはない。そこで先ず β や $\{P_{(i)}\}$ を間接的に推定する問題を検討してみる。

β 及ひ $\{P_{(i)}\}$ の推定

時間間隔を連続的に扱えば上記の問題は、次の積分方程式を $P_{(s)}$ について解くことに帰着する。

$$Y_t=\int_0^S P_{(s)} X_{(t-s)}\,ds \quad \cdots\cdots(3)$$

この種の問題はエコノメトリックスにおいて Distributed Lag の推定の問題として展開されてきている。接近方法としては、二つの仕方が考えられよう。Distributed Lag の場合のように $P_{(s)}$ の関数型を事前に前提する仕方と、他方では、関数型も未知として与えられたデータからその確定を行なう仕方とがある。(3)式の関係が正確に成立しているものとすれば、$Y_{(t)}$ や $X_{(t)}$ をフーリエ展開して $P_{(s)}$ を求める方法は第二の接近方法の一例である。(3)式が誤差項を含んで成立するものとすれば、$P_{(s)}$ の推定は次式

$$E\left\{Y_{(t)}-\int_0^S P_{(s)}X_{(t-s)}ds\right\}^2 \longrightarrow \text{最小}$$

で表現されるところの変分問題として扱うことが出来る。このような第二の接近方法は従来のエコノメトリックでは試みられていないが、追求されてしかるべき問題であろう。ここでは第一の接近方法を採ることにし、$\{P_{(i)}\}$は次のような pascal 分布に従うものと前提することにした。

$$P_{(i)}=\binom{r+i-1}{i}(1-\lambda)^r\lambda^i \qquad i=0,1,2\cdots\cdots \quad \cdots\cdots(4)$$

ここでrやλは未知なるパラメターで、$0<\lambda<1$

Pascal 分布は二項分布と極めて類似した型をしている。よく知られているように、ある試行で確率λで生起する事象があった場合、n回の試行反覆のうち、i回だけ求める事象が生起する確率は二項分布に従う。これに対して、求める事象のr回目の生起が$(r+i)$回目の試行で起こる確率は？ といえば上記の pascal 分布に従うことが知られている。

いま分娩後、T期間だけ経過して種付けが行なわれるものとしよう。仮りにいずれの経産牛についてもTは一定としよう。種付けが一回で成功するものもあろうし、一方何回か反覆せねば受胎しないものもあろう。この場合には$P_{(i)}$は明らかに、$r=1$ の Pascal 分布に従うことになる。然し実際には上記のTは一定でない。これは経産牛の間で変動するものと考えねばならない。この要因としてはいろいろあるが、飼育者の決断もその一つである。$\{P_{(i)}\}$が実際にどの様な型の分布に従うかは上記のTの分布の仕方に大いに依存するが、ここでは $r=1$ を特殊な場合として含むところの Pascal 分布に限定した。この様に想定すると、(2)式を次の様に変換することが出来る。[1]

$$Y_t=\binom{r}{1}\lambda Y_{t-1}-\binom{r}{2}\lambda^2 Y_{t-2}+\cdots\cdots-(-1)^r\lambda^r Y_{t-r}+\beta(1-\lambda)^r X_{t-t_0}\quad\cdots\cdots(5)$$

(2)式に誤差項 u_t を追加して

$$Y_t=\beta\sum_{i=0}^{S}P_{(i)}X_{t-t_0-i}+u_t\quad\cdots\cdots(6)$$

と書けば(6)式の変換式は

$$Y_t=-\sum_{i=1}^{r}\binom{r}{i}(-\lambda)^i Y_{t-i}+\beta(1-\lambda)^r X_{t-t_0}+\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-\lambda)^k u_{t-k}\quad\cdots\cdots(7)$$

なお、パラメター (r,λ) をもつ pascal 分布は

$$母平均=\frac{r\lambda}{(1-\lambda)},\quad 母分散=\frac{r\lambda}{(1-\lambda)^2}\quad\cdots\cdots(8)$$

で

$$モード=[(r\lambda-1)/(1-\lambda)]\ (但し整数部分)\quad\cdots\cdots(9)$$

$\{P_{(i)}\}$ に pascal 分布を想定することの利点は上述で明らかなように、Y_t が過去の Y_{t-i} の有限個の項と X_{t-t_0} の一種の加重平均として表現しうる点である。

然し $\{P_{(i)}\}$ が果して pascal 分布で満足に記述しうるや否やには多少問題が残る。搾乳牛の種付慣行や乳牛の生理的条件から推測すると、分娩後直ちに受胎する機会は稀れであろうから、$P_{(0)}$ 及び $P_{(1)}$ はゼロに近い値をもつものと想定される。飼育技術が標準化してくれれば、分娩後次の受胎までの間隔は三カ月ないし四カ月に集中するであ

表 1

（単位・%）

	1カ月未満	1〜2カ月	2〜3カ月	3〜4カ月	4〜5カ月	5〜6カ月	6カ月〜
昭和32年	3.6	20.3	52.4	17.1	3.8	1.1	1.7
〃 35年	3.1	9.0	36.6	29.6	13.9	3.4	4.4

ろうとすると、$P_{(2)}$、$P_{(3)}$が飛躍的に大きな値をもつことになる。この点は、乾乳期間の分布に類似するように考えられる。表1は「予察調査」で推定されている乾乳期間の分布を示したものである。$\{P_{(i)}\}$が表1のような型の分布であるとすると、pascal 分布で表現することに多少無理が生じてくる。特に、表1の昭和三五年のような型だとすると、$P_{(0)}$、$P_{(1)}$を含めて全域を一つの pascal 分布で充分によく表現することは難しくなる。以上の点を考慮してここでは次のような手続きを施すことにした。

（a）(1)式によると

$$Z_t \equiv \frac{1}{2}(Y_t+Y_{t-1}) = \sum_{i=0}^{S}\frac{1}{2}(P_{(i)}+P_{(i-1)})X_{t-t_0-i} = \sum_{i=0}^{S} Q_{(i)} X_{t-t_0-i} \quad\cdots\cdots(10)$$

$\{Q_{(i)}\}$は$\{P_{(i)}\}$に比らべて pascal 分布で近似し易くなるものと思われる（表1の乾乳期間の分布から判断して）。

（b）$Q_{(0)}$、$Q_{(1)}$はそれぞれ$P_{(0)}$、$P_{(1)}$に比らべて減少してくるので$Q_{(0)}$、$Q_{(1)}$はゼロとみなすことにする。

以上の結果経産牛の分娩頭数系列を生成するモデルとして次式を採用する。

$$Z_t = 2\lambda Z_{t-1} - \lambda^2 Z_{t-2} + \alpha X_{t-12} + V_t \quad\cdots\cdots(11)$$

ただし　$\alpha=\beta(1-\lambda)^2$

すなわち、懐妊期間を$t_0=10$とおきX_{t-t_0}及びX_{t-t_0-1}の項は無視している。$r=2$と特定

表 2

		昭和34	35	36	37	38	37*
上半期 (2〜7)	$\hat{\lambda}$	0.236	0.218	0.359	0.132	0.267	0.293
	$\hat{\alpha}$	0.501	0.462	0.329	0.565	0.474	0.382
下半期 (8〜1)	$\hat{\lambda}$	0.521	0.468	0.454	0.707		0.644
	$\hat{\alpha}$	0.156	0.220	0.268	0.060		0.105

* は実際の分娩系列の資料を用いての推定.

してしまったが、これは計算上の理由からである。これらの影響はすべて誤差項であるV_tの中に一括されていることになる。

⑾式の推定

「予察調査」で得られる資料によれば、分娩総頭数$\{X_t\}$の系列は現在のところ昭和三三〜昭和三八年七月の期間にわたって得られるが、経産牛の分娩頭数$\{Y_t\}$は昭和三六年一一月以降に限られている。このため、ここでは$\{Y_t\}$の系列に関しては実際の系列の代用として「予察調査」で作成しているところの予察値を用いることにした。予察値のもつ誤差の影響は無視できないものであるが、止むをえない。

先ず各年を二月〜七月、および八月〜翌年の一月の期間に区分し、各年のそれぞれの期間毎に⑾式を当てはめてみた。パラメターの推定方法に関しては、注で述べてある(2)。

表2は各期間におけるλ及びαの推定値を掲げたものである。

昭和三七年度については経産牛の分娩頭数$\{Y_t\}$に実際の資料が利用できるので、これを用いて推定した結果が表2の最右欄に掲げられている。第1図に各月のZ_t（予察調査の予察値に基づくもの）と次の$\hat{Z}_t$とをプロットしてある。

$$\hat{Z}_t=2\hat{\lambda}\hat{Z}_{t-1}-\hat{\lambda}^2\hat{Z}_{t-2}+\hat{\alpha}X_{t-12}, \qquad \cdots\cdots(12)$$

$\hat{\lambda}$ 及び $\hat{\alpha}$ は表2による.

各期間の平均の誤差 e を次式により求め

$$e=\sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(Z_t-\hat{Z}_t)^2} \quad \cdots\cdots(13)$$

Tは各期間に含まれる月数.

各期間の平均．$\tilde{Z}=\frac{1}{T}\sum Z_t$ に対する誤差率 $e/\tilde{Z}$ を計算すると次のような結果になる。

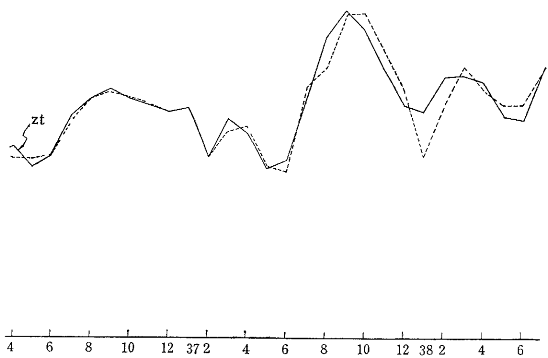
表 3

	昭和34～36	34～38(或いは37)
上半期	0 038	0.050
下半期	0 020	0 057

第1図に見るとおり、昭和三七および三八年は両期間とも可成り大きな誤差をしめしている。この点は表3の誤差率からも判断できる。この原因の一部にはこの年度の「予察調査」による予察値が実際値に比らべて大きく喰違っていたことが挙げられる。試みに昭和三七年について実際の系列を用いて推定したところの $\hat{\lambda}$ および $\hat{\alpha}$（表2の最右欄の数値）を使うと、昭和三七年の誤差率は

上半期　〇・〇四五　　下半期　〇・〇二七

と減少し、特に第1図に見られる下半期の大



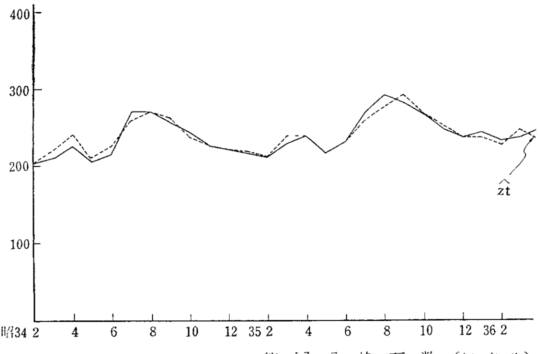
の 系 列（単位：100頭）

きなギャップは消去されてしまう。その詳細については表4を見られたい。表4は昭和三七年の各月について、分娩頭数（経産牛の）の実際値、予察調査の予察値及び $\hat{Z}_t$（実際の系列に基づき、(11)式で求めたところの）を併記したものである。なお昭和三七年の予察値の誤差率は次の通りである。

上半期　〇・〇五一　　下半期　〇・一一〇

$\{P(\omega)\}$ の季節差について

表2にみるように、いずれの年次も上半期に比らべて下半期の $\hat{\lambda}$ がより大きくなっていることが判かる。これはここでのモデルによれば分娩から次の受胎までの平均期間が下半期の方がより長いことを意味している。このような差は各シーズン内部の月の間についても考えられるかも知れない。事実、$\hat{Z}_t$ の誤差をみると、例えば五月、六月は系統的な偏りをもつもののように思われる。これまで述べてきた計測では、例えば上半期に属する月はいずれも同一のパラメター（λ、α）をもつものと考えたが、やはり、これらのパラメターは上半期内部の月の間で相違するものと考えねばならないだろう。そこで(11)式の代



第1図　分 娩 頭 数（経 産 牛）

表 4

（単位 10頭）

	Z_t	$\hat{Z}_t$	$Z_t-\hat{Z}_t$	Y_t	$Y_t{}^*$	$Y_t-Y_t{}^*$
37年 2月	2,707	2,629	78	2,388	2,275	113
3	2,682	2,753	−70	2,975	3,033	−58
4	2,674	2,702	−28	2,372	2,590	−218
5	2,274	2,438	−164	2,175	2,288	−113
6	2,397	2,184	321	2,619	2,436	183
7	3,026	3,024	2	3,432	3,425	7
8	3,509	3,670	−161	3,537	3,830	−293
9	3,454	3,430	24	3,481	4,049	−568
10	3,429	3,365	64	3,426	3,780	−354
11	3,390	3,412	−22	3,431	3,245	186
12	3,336	3,370	−34	3,349	2,947	402
38年 1月	3,485	3,345	140	3,322	2,930	392

＊ は予察調査による予察値

りに次のようなモデルを昭和三四〜三八年の上半期の月に当てはめてみる。

$$Z_{ij}=2\lambda Z_{i,j-1}-\lambda^2 Z_{i,j-2}+\alpha_j X_{i-1,j} \quad \cdots(14)$$

ここで Z_{ij} は i 年の j 月の分娩頭数（経産牛の）、$X_{i-1,j}$ は一年前の j 月の総分娩頭数である。(14)式では昭和三四〜三八年を通じて λ は一定で、α だけが月間で異なるものと想定している。この場合の λ、α_j の推定方法は注で述べてあるが、結果は次の通りである。(3)

$$\hat{\lambda}=0\ 319$$

これは分娩より次の受胎までの平均期間が、二・九ヵ月であることを意味している。

$\hat{\alpha}_j$ は表5に見るように月間で変動している。

表 5

	37.2	3	4	5	6	7
α_j	0.395	0.380	0.373	0.331	0.381	0 405

昭和三七年の下半期は $\{Z_i\}$ にいずれの系列を用いても $\hat{\lambda}$ が他の年度に比らべて著しく大きくなっているが、一体どのような事態が生じた結果なのであろうか。表2および表5の結果を照合すると、$\{P_{(i)}\}$ はある季節性をもって、

年次間で変化していくものと考えねばならない。分娩頭数系列を生成しうる最終モデルはこれらの変動を説明しうる要因を陽表的に含むように定式化されることが望ましい。

ロ　未経産牛の分娩頭数

イの場合と同じく懐妊期間をt_0カ月とする。未経産牛の場合は、ある月の受胎頭数はそれより以前の各月における未経産牛がどのような頻度で種付けを行なうかにより決定される。各月（期首における）の未経産牛総頭数をu_tと記す。u_tのうち、初産月令に達した頭数の割合をβとしよう。これらの牛が実際に受胎するまでの期間をi月とし、その確率分布を$\{P_{(i)}\}$と考えれば、未経産牛の分娩頭数Y'_tを生成するモデルは次式で表わされよう。

$$Y'_t=\beta\sum_{i=0}^{\infty}P_{(i)}u_{t-t_0-i} \qquad \cdots\cdots(15)$$

そしてイの場合と同じ様な諸仮定を設ければ、未経産牛の分娩頭数Z'_tに関して⒃式が得られる。

$$Z'_t=2\lambda Z'_{t-1}-\lambda^2 Z'_{t-2}+\alpha u_{t-12} \qquad \cdots\cdots(16)$$

ただし　$Z'_t\equiv\frac{1}{2}(Y'_t+Y'_{t-1})$

イの場合と同じように、実際の分娩頭数系列は昭和三六年一一月以降に限られている。$\{u_t\}$の系列は昭和三四年五月以降作成されている。従って「予察調査」による予察値を代用することにして、⒃式のパラメターを計測してみた。その結果は表6に掲げてある。

第2図に各月のZ'_t（予察値に基づく）と$\hat{Z}'_t$をプロットしてある。両者の大きなギャップが昭和三七年度に見られ

る点はイの経産牛の場合と同様である。昭和三五〜三八年を通じての誤差率は次の通りである。

上半期　〇・〇四八　　下半期　〇・〇六七

三　むすび

計測の用具として $r=2$ の pascal 分布が中心となったが、r をいろいろ変えたり、或いは $\{X_{t-r}\}$ の中で無視した項を考慮したりなど、さまざまな吟味が残されている。このような手続きを施すことにより誤差率を確かに減少することが出来るが、より肝要なのは $\{P_{(i)}\}$ の変化を如何に把握するかという問題であろう。この点に関しては次回の報告で述べたいと思う。

表 6

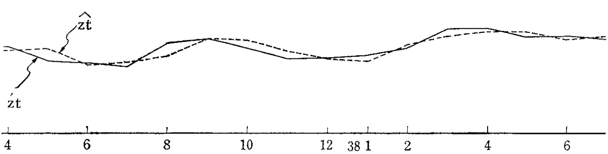
		昭和36	37	38
上半期	$\hat{\lambda}$	0.510	0.553	0.230
	$\hat{\alpha}$	0.069	0.046	0.211
下半期	$\hat{\lambda}$	0.231	0.495	
	$\hat{\alpha}$	0.200	0.065	

注(1)　"On a Family of Lag Distribution" by R M. Solow. *Econometrica*, 1960 を見られたい。

(2)　$\sum_t (Z_t-2\lambda Z_{t-1}+\lambda^2 Z_{t-2}-\alpha X_{t-12})^2$ を最小にするように λ、α を定めると、正規方程式は

$$A-2B\lambda+C\lambda^2-N\alpha=0$$

$$E-(2H+F)\lambda+3I\lambda^2-K\lambda^3-\alpha(B-\lambda C)=0$$



分娩頭数（単位：100頭）

ここで

$$A=\sum_t Z_t X_{t-12},\qquad E=\sum Z_t Z_{t-1}$$

$$B=\sum_t Z_{t-1} X_{t-12}\qquad F=\sum Z_t Z_{t-2}$$

$$C=\sum_t Z_{t-2} X_{t-12}\qquad H=\sum Z^2{}_{t-1}$$

$$N=\sum_t X^2{}_{t-21}\qquad I=\sum Z_{t-1} Z_{t-2}$$

$$K=\sum Z^2{}_{t-2}$$

従ってλは次の方程式の根となる。但し $0<\lambda<1$

$$\left\{E-\frac{BA}{N}\right\}-\left\{(2H+F)-\frac{(CA+2B^2)}{N}\right\}\lambda+3\left\{I-\frac{BC}{N}\right\}\lambda^2-\left\{K-\frac{C^2}{N}\right\}\lambda^3=0$$

$r=3$の時にはλは五次の代数方程式の根となり、rを増す毎にλを求める作業は労力的になる。

（3） この場合の $\hat{\lambda}$ および $\hat{\alpha}_j$ は次式により与えられる。

$$\left\{E-\sum_j\frac{B_jA_j}{N_j}\right\}-\left\{(2H+F)-\left(\sum_j\frac{C_jA_j}{N_j}+\sum_j\frac{2B_j{}^2}{N_j}\right)\right\}\lambda+\left\{I-\sum_j\frac{B_jC_j}{N_j}\right\}\lambda^2$$
$$-\left\{K-\sum_j\frac{C_j{}^2}{N_j}\right\}\lambda^3=0$$

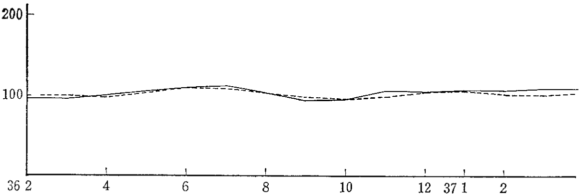
および

$$\alpha_j=N_j{}^{-1}(A_j-2\lambda B_j+\lambda^2C_j)$$

ここで

$A_j=\sum_i Z_{i,j}X_{i-1,j}$ 以下これに準ずる。

（研究員）



第2図 未経産牛の