作付転換過程について

三枝義清

一、序

農作物の作付面積の年次変動を扱う計量モデルの中で、よく知られているものは、Distributed lag Model と Recursive programming model である。前者の適用例としては土屋〔11〕（〔 〕内の数字は後掲の参考文献の番号を示す。以下おなじ）の麦類の作付面積変動、麦類も含めた広汎な作物に関する唯是〔12〕の計測等がある。後者のモデルの応用は Henderson や Day 等により研究されているが、わが国での適用例については余り知られていない。(1)
これらのモデル以外では清水〔5〕、〔6〕の扱った計測例にみられる作付面積変動をマルコフ過程の観点よりとらえる分析方法が興味深い。いまのところ確定された方法にはなっていないが、上記の二つのモデルに劣らず注目に

値するものである。この報告では二で作付転換を時間的に homogeneous な過程として扱った場合の諸結果について述べる。三と四では Non-homogeneous な過程とみた場合に生ずる実際的な問題を扱う。一はそのための準備のつもりである。

Distributed lag model（制度、技術等の制約に帰因する）では、t期におけるある industry の長期の均衡供給量をS_t^*とした時、各期の供給量 S_t の収束過程は

$$S_t-S_{t-1}=r\ (S_t^*-S_{t-1})\quad 0\leq r\leq 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1\cdot 1)$$

と想定される。初期時点を充分遠方におけば

$$S_t=\sum_{i=0}^{t} r\,(1-r)^{t-1}\,S_i^*$$

したがって $S_t^*=S^*$ とおけば、S_t は指数的に S^* に近接してゆくことになる。収束速度は r（調整係数）で規定される。r がどんな値をとるかは農家が価格条件の変化に対応して作付変更を行なう際直面する制度的・技術的環境に依存するものと考える。S_t^* が前期の価格 Z_{t-1} に依存するものとして次の供給関数を想定すれば

$$S_t^*=\alpha_0+\alpha_1 Z_{t-1}+u_t \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1\cdot 2)$$

u_t は残差項

各期の S_t を規定する測定式として次式が導出される。

$$S_t = r\alpha_0+\alpha_1 rZ_{t-1}+(1-r)S_{t-1}+ru_t \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1\cdot 3)$$

このモデルでは作物間の競合を含む交互作用関係は陽表的には組み入れられていない。たかだか競合作物の価格が

説明変数として1・2式の右辺に追加されるだけである。

マルコフ連鎖モデルの場合でも同様の展開が行なわれるが、この場合、中心的な役割を果すものとして Transition matrix が新たに登場する。先ず最初に競合関係などを無視し、単一作物に限定して、その考え方の骨子を述べる。

作付面積の範囲をk個のクラスに分ける。i番目のクラスの平均を q_i ($i=0, 1, \cdots\cdots k-1$) i番目のクラスに属する農家数を m_i としよう。$i=0$ は面積なしのクラスであるから $q_0=0$

したがって総作付面積は $S=\sum_{i=0}^{k-1} m_i q_i$ 総農家数 $\sum_{i=0}^{k-1} m_i$ は一定としておく。ある時点で i番目のクラスにあった農家は単位期間内に、確率 a_{ij} をもって i番目のクラス移動するものとする。従って i番目のクラスに属する農家群には、次のようなk個の確率の組（行ベクトル）が対応している。

$$a_{i0}, a_{i1}, \cdots \cdots a_{i, k-1}$$

その他のクラスにも類似の行ベクトルが与えられる。このk個の行ベクトルで構成されるマトリックスが Transition Matrix のAである。初期時点の規模分布を $M_0=(m_0, \cdots\cdots m_{k-1})$ とすれば、一期間経過後の分布 M_1 は $M_1=M_0A$ 総作付面積は $Q'=(q_0, \cdots\cdots q_{k-1})$ を用いて $M_1Q=M_0AQ$

もしAが時間の経過を通じて不変であれば、各期の規模分布 M_t はAのみに依存して定まるところの特定な均衡分布 M_∞ に収束してゆく。

したがって各期の総作付面積 S_t も、ある一定の値 S_∞ に収束する。すなわち

$$S_\infty=M_\infty Q=\lim_{t\to\infty} M_0A^tQ \quad \cdots\cdots(1・4)$$

極限においては農家全体の S_t は一定の値 S_∞ をとることになるが、個々の農家でみればその規模は絶えず変動している。

このモデルにおいてはその長期の供給関数を、上述では不変とみなしたAを各期の価格条件Zに応じて変化する関数（matrix-valued の）とみなすことにより導出するのが自然であろう。各期のAが前期の価格条件Zに応じて定まるものとすれば、それぞれのZに対して1・4式で与えられる極限値が対応する。すなわち

$$S_\infty(Z)=\lim_{t\to\infty} M_0 A(Z)^t Q \quad \cdots\cdots(1\cdot5)$$

(Z, $S_\infty(Z)$) のグラフがこの場合の農家全体に関する長期の供給関数で Distributed lag model の1・2式に対応するものである。このように規定された供給関数が、供給関数としての望ましい性質をもつためには A(z) の構造にいろいろの specification を与えねばならない。この点については wolf〔13〕が論及している。

これまで実際の規模分布を説明するストカスティク・モデルとして、Homogeneous なマルコフ過程モデルが適用されてきたが、狙いは観測された分布に近接した極限分布が得られるように如何に Transition matrix A の構造に妥当な仮定を置くかということである。この種の試みは当然上述の議論に生かされねばならない。

企業規模の分布の生成を説明する、ストカスティク・モデルとしてよく用いられるものに、birth and death 型のモデルがある。たとえば steindl〔7〕は規模の尺度をその企業の製品を購入するチャンスをもつところのCustomer population で測った場合、その population の成長に birth and death process のモデルを適用している。二で用いた過程は競合などの交互作用関係を含んだ birth and death 型のものであるので、ここで基本的な birth and death 過程についてその考え方をやや詳しく述べておこう。例として Steindl の Customer population を考

えよう。t時点で Customer population のサイズがnであったとする。ただしnは整数値のみをとるものとする。(t, t+Δt) の間に新たに一人の Customer が追加される、つまり、企業規模が (n+1) に移動する確率（条件付き）を

$$\lambda n\Delta t+(\Delta t)$$

と仮定する。λn はnにのみ関係するパラメター、$0(\Delta t)$ は Δt に比らべて高次の項である。一方、(t, t+Δt) の間に一人の Customer が他の企業に移ることにより、消失する確率は

$$\mu_n\Delta t+0(\Delta t)$$

で表わせるものとする。λ_n や μ_n は時間を通じて不変と考えているが、さらに次の条件を追加する。

$$\lambda_n=n\lambda,\qquad \mu_n=n\mu \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot6)$$

(t, t+Δt) の間に一人以上の Customer が追加されたり、あるいは消失したり、または追加と消失が同時に生起することが起こりうるわけであるが、このような事象の起こる確率は稀れだとみなして $0(\Delta t)$ と仮定する。1・6式の第一の仮定は顧客数の増加要因として Contagion effect や市場拡大による間接効果を反映するものである。二のモデルではこの λ_n をサイズnには比例しない常数と仮定されている。birth and death 型の過程の特長は単位時間内での規模の増減がその両隣りに限られるということにある。t時点で Customer population がnに到達する確率を $p_n(t)$ と記す。ただし t=0 では n=1 であったとする。上述の仮定から $P_n(t)$ について次のような一階の偏微分方程式が導出される。($\Delta t\to0$ と極限移行して) これを解いて $P_n(t)$ が導出されることになる。

$$\frac{dP_n(t)}{dt}=-(\lambda_n+\mu_n)P_n(t)+\lambda_{n-1}P_{n-1}(t)+\mu_{n+1}P_{n+1}(t)\quad (n=1,\ 2,\cdots\cdots)$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t)$$

二に現われる方程式は $P_n(t)$ を変換した量を用いて表わされているが、原理は同じである。

上述の過程は Continuous time で表現されていたが、discrete time の場合、これに対応する過程は Transition matrix A が次のような構造をもつものである。

第１表

t-1 ＼ t	s_0	s_1	s_2	s_3 …..	s_{n-1}	s_n
s_0	$1-\lambda_0$	λ_0	0	0 ・ ・	0	0
s_1	μ_1	$1-(\lambda_1+\mu_1)$	λ_1	0 ….	0	0
s_2	0	μ_2	$1-(\lambda_2+\mu_2)$	μ_2 ・	0	0
⋮						
s_{n-1}						
s_n	0	0	0	0・ ・ ・	μ_n	$1-\mu_n$

ただし s_i は規模階層，s_0 は規模ゼロのクラス

クラス $s_i(i=1,2,\cdots)$ にあったものは単位期間に S_{i-1} あるいは S_{i+1} に移動するか、そのまま同じクラスの S_i に留まるかの何れかである。μ_i は下降する確率、λ_i は上昇する確率を表わしている。

このマトリックスは symmetrizable markov matrix あるいは birth and death matrix とも呼ばれているが次のような性質をもっている。

㋑ 固有値がすべて実数で互いに異なっている。

㋺ 極限分布 $P_\infty=(p_0, p_1,\cdots p_n)$ は次式で与えられる。

$$p_i = p_0 \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i} \quad (i=1,2,\cdots\cdots n)$$

㋩ $\lambda_i+\mu_{i+1}<1 \quad (i=0,\ n-1)$ であれば

$$\lim_{t\to\infty} P_0 A^t = P_\infty$$

ただし P_0 は初期分布

㋺にみられるように極限分布とAの要素との関係が陽表的に表示されるので、Wolf〔13〕の議論でもこの birth and death matrix が利用されている。さら

にAの要素に適当な条件を追加することにより、極限分布としていろいろな代表的分布を誘導することが出来る。

注(1) 次の計測例が唯一の適用例ではなかろうか。

原　昭夫「農家の作物選好に関する経営意図について」農業総合研究所『第一三回研修論文』。

二、Poisson-markov process としての作付転換過程

一では作物間の競合などの交互作用関係が無視されていたが、この点を考慮に入れた過程を考えてみる。ここで用いたストカスティク・モデルは poisson-markov process ないし immigration-emigration process と呼ばれるもので、一で述べた birth and death process を特殊ケースに含むものである。作付転換過程に対しては強引な操作であるが、contunuous time で考えてみる。

t 時点における、農家の土地利用状況を $N_t' = (n_1(t), \cdots\cdots n_k(t))$ で表わす。$n_r(t)$ は r 番目の作物で占められる面積、$n_r(t)$ は適当な単位面積で測ることにして整数値のみをとるものとする。具体的には四で述べるような土地利用を対称にしているので、N_t' の中には不作付地も一成分として含まれている。単位期間 $(t, t+\Delta t)$ での N_t' の推移は次のように起こるものとする。

	状態の推移	推移確率
(イ)	$n_r(t) \longrightarrow n_r(t)+1$	$\lambda_r \Delta(t) + 0(\Delta t)$
(ロ)	$n_r(t) \longrightarrow n_r(t)-1$	$\mu_r^* n_r(t)\Delta t + 0(\Delta t)$
(ハ)	$\begin{cases} n_r(t) \longrightarrow n_r(t)+1 \\ n_s(t) \longrightarrow n_s(t)-1 \end{cases}$	$\mu_{sr} n_s(t)\Delta t + 0(\Delta t)$

作付転換過程について

(イ)は新耕地一単位が r 番目の作物に追加される場合、(ロ)は t 時点で r 番目の作物で占められていた耕地が、その一単位を非耕地として失う場合である。(ハ)を詳しく表わせば次の如き状態の推移を意味している。すなわち s 番目の作物より r 番目の作物に一単位の耕地が移動する状態である。

$$(n_1(t), \cdot\ , n_r(t), \cdot\ \cdot, n_s(t), \cdots) \to (n_1(t), \cdots, n_r(t)+1, \ \cdot, n_s(t)-1, \ )$$

(ニ)　上記の(イ)～(ハ)以外の状態変化の起こる確率は $0(\varDelta t)$ である。

したがって、同一の状態に留まる確率は

$$1-\Big\{ \sum_r \lambda_r + \sum_r (\mu_r^* + \sum_{s \neq r} \mu_{rs}) n_r(t) \Big\} \varDelta(t) - 0(\varDelta t)$$

N_t' の probability generating function (p. g f.) を ϕ と記せば

$$\phi \equiv \phi_t(Z) = E\Big\{ \prod_{r=1}^{k} z_r^{\ n_r(t)} \Big\}$$

上記の仮定より ϕ についての偏微分方程式が導かれる（$\varDelta t \to 0$ へと極限移行して）。[1]

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \phi \sum_{r=1}^{k} \lambda_r (z_r - 1) + \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial \phi}{\partial z_r} \Big\{ \sum_{s \neq r} \mu_{rs} (z_s - z_r) + \mu_r^* (1 - z_r) \Big\} \cdots\cdots \quad \cdots \qquad \cdots \cdots (2 \cdot 1)$$

2・1式の解に必要な諸係数を先に列記すると、

(a)　$\Lambda = (\Lambda_{ij}) = \begin{pmatrix} \mu_1^* + \sum_{s \neq 1} \mu_{1s}, & -\mu_{12}, & \cdots\cdots \\ -\mu_{21}, & \mu_2^* + \sum_{s \neq 2} \mu_{2s} & \cdots\cdots \\ \vdots & \cdot & \end{pmatrix}$

すなわち　$\Lambda_{ij} = -\mu_{ij}$　　$\Lambda_{ii} = \mu_i^* + \sum_{j \neq i} \mu_{ij}$

マトリックス Λ の固有値を l_1, ……, l_k これらはすべて正となるので $|\Lambda| \neq 0$

(b) $L=\begin{pmatrix} l_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & l_k \end{pmatrix}$

(c) $W=\begin{pmatrix} \eta'_1 \\ \vdots \\ \eta'_k \end{pmatrix}$ η'_r は Λ の固有（行）ベクトル

$\eta'_r = l_r \eta'_r$

(d) 行ベクトル $m'=(m_1, \cdots m_k)$ は次式で与えられるものである。

$\lambda'=m'\Lambda$ ただし $\lambda'=(\lambda_1, \cdots \lambda_k)$

方程式２・１式の一般解は

$$\phi_t(z)e^{-m'(z-1)}=F\{\eta_1'(z-1)e^{-l_1 t}, \cdots, \eta'_r(z-1)e^{-l_r t}\cdots\} \quad \cdots(2\cdot2)$$

ただし $z-1=(\cdots z_r-1, \cdots)'$

次の初期条件によってFの関数形を定めると

i.c $\phi_t(z)=\prod_{r=1}^{k} z_r^{n_r}$ すなわち $t=0$ では $N'_0=(n_1 \cdots n_k)$

２・１式の解は次式で与えられる。

$$\phi_t(z)=\exp\left\{m'(I-P(t))(z-1)\right\}\cdot\prod_{r=1}^{k}[1+\delta'_r(z-1)]^{n_1} \quad \cdots(2\cdot3)$$

ここでＩ：単位行列

$$P(t)=\begin{pmatrix}\delta'_1\\ \vdots\\ \delta'_k\end{pmatrix}=W^{-1}e^{-Lt}W$$

$l_r>0,\ r=1,\cdot\ k$ であるから

$$\lim_{t\to\infty} P(t)=0$$

したがって $t\to\infty$ に応ずる p.g.f. は次の如きものである。

$$\phi_\infty(z)=\exp\{m'(z-1)\} \qquad \cdots\cdots (2\cdot 4)$$

2・4式より $N'_t=(n_1(t),\cdots,n_k(t))$ の極限分布は、それぞれの成分が独立にポアッソン分布にしたがうという性質をもつことが判かる。パラメターは上記の(d)で定義されるところの $m_r,(r=1,2,\cdots k)$ で規定されるものである。(d)を変形すると

$$\lambda_r+\sum_{s\neq r} m_s\mu_{sr}=m_r(\mu_r^*+\sum_{s\neq r}\mu_{rs})\quad (r=1,2,\cdots k) \qquad \cdots\cdots (2\cdot 5)$$

2・5式の左辺はr番目の作物への耕地の流入率（瞬間的な）、右辺は他作物への流出率である。これがすべての作物間で均衡するように $m_1,\ m_2,\ \cdots m_k$ が定まるわけである。2・5式より知られるように、影響するのは作物間の相互作用関係を規定するマトリックス Λ と非耕地からの流入率 λ' だけで、初期状態には無関係である。

$t\to\infty$ では $n_i(t)$ はお互いに独立に分布するから、総面積 $\sum_{i=1}^{k} n(t)$ も $\sum_{i=1}^{k} m_i$ をパラメターにもつポアッソン分布にしたがうことになる。とくに $\mu_r^*=\mu^*$ の場合には

$$\sum_{r=1}^{k} m_r=\sum_{r=1}^{k}\lambda_r/\mu^*$$

この場合には $\sum_{i=1}^{k} n_i(t)$ の過程は作物間の耕地の流出入が消去されてしまい、immigration rate $\sum_{r=1}^{k}\lambda_r$, death rate

μ^* だけで規定されるところの immigration-death process になってしまうので、上記の結果は当然である。然し一般に μ_r^* が作物間で違う場合でも総面積の極限分布はポアッソン分布をなすことになる。既述のように、このモデルでは一単位の耕地が新たに追加される確率がその時点の規模に無関係であるという前提が置かれている。この点総面積（耕地）の過程を記述するモデルとしては著しい単純化が施されていることになる。

つぎに $\{N_t\}$ が均衡状態に達した場合ないし初期時点が遠く隔っていた場合、$\{N_t\}$ が時系列としてどの様な性質をもつものなのかを述べておく。先ず均衡状態になった場合の、$N_{t+\tau}$ と N_t の joint probability generating function を求めると、

$$\varphi(Z_t, Z_{t+\tau}) \equiv E\left\{\prod_{r=1}^{k} Z_{t,r}^{\;n_{t,r}} \prod_{r=1}^{k} Z_{t+\tau,r}^{\;n_{t+\tau,r}}\right\} \quad ただし\tau \geqq 0$$

$$= \exp\{m'(Z_t - 1) + m'(Z_{t+\tau} - 1) + m'(\hat{Z}_t - I)\,P(\tau)(Z_{t+\tau} - 1)\} \quad \cdots\cdots(2\cdot6)$$

ここで

$$\hat{Z}_t = \begin{pmatrix} Z_{t,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Z_{t,k} \end{pmatrix}$$

ここで $Z_{t,r} = 1 + y_{t,r}$ $(r = 1, \cdots k)$ とおいて2・6式を $Y_1' = (y_{t,1}, \cdots, y_{t,k})$, $Y_2' = (y_{t+\tau,1}, \cdots, y_{t+\tau,k})$ に関する式に書き改めると、これは joint factorial moment generating function に他ならない。(2)

$$\varphi(Y_1, Y_2) = \exp\{m'(Y_1 + Y_2 + \hat{Y}_1 P(\tau) Y_2)\} \quad \cdots\cdots(2\cdot7)$$

ただし　$\hat{Y}_1=\begin{pmatrix} y_{t,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & y_{t,k} \end{pmatrix}$

右辺を展開して $y_{t,r}$, $y_{t+\tau,r}$ ならびに積 $y_{t,r}\cdot y_{t+\tau,s}$ の係数を調べることにより次の性質が導かれる。

性質(1)　$E\{N_t\}=m$

性質(2)　$E\{(N_t-m)(N_{t+\tau}-m)'\}=\hat{m}P(\tau)$

ただし　$\hat{m}=\begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_k \end{pmatrix}$　$\tau\geqq 0$

さらに2・3式を用いて N_t を固定した場合の $(N_{t+\tau}-m)$ の〔条件付〕factorial moment generating function を導き、上述の(2)の時と同様な手続きにより

性質(3)　$E\{(N_{t+\tau}-m)'|N_t\}=(N_t-m)'P(\tau)$

上記の(1)および(2)により、$\{N_t\}$ は multiple な stationary process をなすことが判る。N_t と $N_{t+\tau}$ との間の autocovariance matrix は $\hat{m}P(\tau)$ で与えられることになる。(3)は $N_{t+\tau}$ の N_t への回帰関係が直線的であり、パラメターが $P(\tau)$ で規定されることをしめしている。仮りに時点 t_0 の N_t が均衡値よりも変位していたとしても、$\lim_{\tau\to\infty}P(\tau)=0$ であるから時間の経過と共にその後の N_t は均衡値 n に終着してしまう。マトリックス $P(\tau)$ はそのような役割をもつものである。

特殊なケースとして、k=1 すなわち単一作物の場合を考えてみると、t=0 で n_0 であった時の $E(n_t)$ は

$$E(n_t)=(n_0-m)e^{-\mu^* t}+m \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot 8)$$

あるいは

$$\frac{d\tilde{n}_t}{dt}=\mu^*(m-\tilde{n}_t) \quad ただし\ \tilde{n}_t=E(n_t)$$

これは distributed lag model で仮定されている long run の均衡点への移動を規定する time-path の式（初期値をn_0として）を continuous time で表現したものに他ならない。そこでの調整係数はこのモデルでは death rate の μ^* となる。k種類の作物が競合する一般の場合は上記の性質(3)によって均衡値への time path が規定されるわけであるが、$P(\tau)$ を次のように matrix exponential として表現し直せるから

$$P(\tau)\equiv W^{-1}\Lambda W=\exp(-\Lambda\tau) \quad \tau\geq 0$$

性質(3)は上記の2・8式に類似した形で表わすことが出来る。

$$E(N_t')=(N_0-m)'e^{-\Lambda t}+m \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot 9)$$

2・9式は、作物間の交互作用関係を陽表的に内蔵した Matrix form の distributed lag model が展開可能であることを示唆するものである。

注(1) Bartlett〔2〕によって次のような Operational equation が与えられている。

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\sum\ (Z_1^{j1}\cdot\ Z_k^{jk}-1)f_{j1\cdots jk}\ (Z_1\frac{\partial}{\partial Z_1},\cdots,Z_k\frac{\partial}{\partial Z_k})\psi$$

関数 $f_{j1\cdots jk}$ $(n_1 \cdots n_k)$ は推移確率系が指定されれば確定する。(イ)〜(ニ)の仮定を用いて2・1式が算出できる。

なお方程式2・1の解の導出過程や、poisson-markov process に関する議論は、Ruben〔4〕, patil〔3〕に詳しく述べられている。

(2) たとえば $Y'=(y_1, y_2)$ とすれば

$$\varphi(Y) \equiv \sum_{i,j} (1+y_1)^i (1+y_2)^j P_r(i,j)$$

$$= 1 + \sum_{\substack{r=1\\s=1}}^{\infty} \frac{y_1^r y_2^s}{r!\,s!} \mu'_{[r,s]}$$

ただし　$\mu'_{[r,s]} = \sum_{i,j} i^{[r]} j^{[s]} P_r(i,j)$

$i^{[r]} = i(i-1) \cdots (i-r+1)$

$P_r(i,j)$ は組 (i,j) の joint probability, $\mu'_{[r,s]}$ は factorial moment と呼ばれるものである。

三、Variable transition matrix について

清水〔5〕〔6〕では、作付転換過程を homogeneous なマルコフ連鎖過程とみなして、分析が進められている。後出第5表は昭和三六／三七年の冬期土地利用に関する作付転換表である。たとえば第一行は昭和三六年の冬期に、麦類で占められていた面積のうち、次年度、他作物に転換した割合（都府県の合計）をしめしている。実際にはこれ以外に非耕地化した面積があるが、上記の割合は耕地として残留した面積を分母にして求めたものである。

一行一列は前年に引きつづき麦として利用された割合である。上述の通り非耕地との関係が無視されているので、第5表のような転換表で作付転換過程を考察するためには若干の仮定が必要である。

作付面積の年次変化を作物間の耕地の流れとして把えれば次の第2表のようなマトリックス形式で表現できる。

S_{ij} は i番目の作物より j番目の作物に転換した面積。とくに S_{i0} は非耕地化した面積である。S_{0j} は非耕地より j番目の作物に追加（利用度の向上もこの中に計上）された面積を表わすものとする。

いま $(t-1)$ 年における i番目の作物の作付率を $m_{i,t-1}$, t年の作付率を $m_{i,t}$ とする。第2表に掲げたような面

第2表

t-1 \ t	1	2	·	j	··	n	0
1	S_{11}	S_{12}	·	S_{1j}		S_{1n}	S_{10}
2							
i				S_{ij}			S_{i0}
n							
0				S_{0j}			

$$S_{i0} = \sum_{j=1}^{n} S_{ij}$$
$$S_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{n} S_{ij}$$
$$S_{\cdot\cdot} = \sum_{i=1}^{n} S_{i\cdot}$$
$$S_{\cdot 0} = \sum_{i=1}^{n} S_{i0}$$
$$S_{0\cdot} = \sum_{i=1}^{n} S_{0i}$$

積変動が生じたものとすれば

$$m_{i,t-1} = \frac{S_{i\cdot}+S_{i0}}{S_{\cdot\cdot}+S_{0\cdot}},\quad m_{i,t} = \frac{S_{\cdot i}+S_{0i}}{S_{\cdot\cdot}+S_{0\cdot}}$$

$\{m_{i,t-1}\}$ と $\{m_{i,t}\}$ の関係は次のとおり。

$$m_{jt} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, m_{i,t-1} + u_{jt} \quad (j=1,\cdots,n) \cdots\cdots\ \cdots\cdots (3\cdot1)$$

ただし　$a_{ij} = S_{ij}/S_{i\cdot}$

$$u_{jt} = (S_{\cdot\cdot}+S_{0\cdot})^{-1}\left\{\sum_i a_{ij}(S_{\cdot 0}\, m_{i,t-1} - S_{i0}) + S_{0j} - S_{0\cdot}\sum_i a_{ij}\, m_{i,t-1}\right\}$$

第5表に掲げた転換表は上記の a_{ij} を要素にもつマトリックスに対応するものである。〔a_{ij}〕の行和はいずれも1であるから、stochastic matrix になっている。3・1式で常に $\sum_{j=1}^{n} u_{jt}=0$ が成り立つが、個々の u_{jt} は必ずしも零ではない。しかし、次の二つの仮定を設ければ $u_{jt}=0$ $(j=1,\cdots n)$ となって非耕地との関係を無視できる。

仮定㋑　$\dfrac{S_{i\cdot}}{S_{\cdot\cdot}} = \dfrac{S_{i0}}{S_{\cdot 0}}$

仮定㋺　$\dfrac{S_{\cdot i}}{S_{\cdot\cdot}} = \dfrac{S_{0i}}{S_{0\cdot}}$

㋑は非耕地化する面積は耕地として残留する面積に比例するという仮定であるが、これは耕地一単位が非耕地化する確率が各作物を通して一定であるという想定に等しい。仮定㋑、㋺の下では3・1式は次のようになる。

$$m_{j,t}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}m_{i,t-1} \quad \cdots\cdots(3\cdot2)$$

$\sum_i m_{i,t}=\sum_i m_{i,t-1}=1$ かつ〔a_{ij}〕が stochastic matrix である点に注目すれば、3・2式は形式的には〔a_{ij}〕を Transition matrix にもつところの markov chain model を規定する基礎方程式に他ならない。〔a_{ij}〕が時間を通じて不変と考えれば、作付転換過程は Homogeneous な markov model として処理できるわけである。しかし作付面積の年次変化についての従来の計測例から類推されるように、現実の作付面積系列を追求する場合 Transition matrix を時間的に homogeneous なものと考えるのは適当でない。一で述べたように、価格変化が起きればそれに応じて関数的に変動するものと考えねばならない。この種の問題は Telser〔9〕が消費者の Brand choice を market share data を用いて分析した際に論じられているので、先ずその要点を述べておく。

t期の market share data を {m_{it} i=1,‥n} で表すものとして、3・2式を仮定する。A=〔a_{ij}〕は消費者が Brand (i) より Brand (j) に移動する確率である。a_{ij} はその期間の価格条件Zに応じて変化するものと考える。学習効果、Brand Royalty 等その他要因は無視する。ある価格ベクトルZに対応する long run の market share の定義は一の場合と同様である。分析対象はオレンジ・ジュース、インスタントコーヒー、マーガリン、煙草等であるが、計量分析に利用できる資料は各期の {m_{it},i=1,‥n} だけでAそのものについての資料は与えられていない。したがって実際に適用される統計的モデルは次のように単純化される。

先ずi番目の Brand と「その他」Brand の二つのグループに分けてしまうので Brand (i) の share を m_t と記せば3・2式は

$$m_t=a_t m_{t-1}+b_t(1-m_{t-1})=b_t+(a_t-b_t)m_{t-1} \quad \cdots\cdots(3\cdot3)$$

ただし　$a_t = a_{11,t}$.　$b_t = a_{j1,t}$.

3・3式の右辺の $(a_t - b_t)m_{t-1}$ の項を次の要領で展開する。

$$X_tY_t = W_0 + W_1X_t + W_2Y_t + V_t \quad \cdots\cdots (3・4)$$

ただし　$W_0 = \mathrm{Cov}(X_t, Y_t) - \overline{X}\,\overline{Y}$

$W_1 = \overline{Y}$　観察期間を通じての Y_t の平均

$W_2 = \overline{X}$　〃　〃　〃　x_t の〃

$V_t = (X_t - \overline{X})(Y_t - \overline{Y}) - \mathrm{Cov}(X_t, Y_t)$

3・4式を用いて3・3式を変形すると

$$m_t = \mathrm{Const} + b_t + (\overline{a} - \overline{b})m_{t-1} + (a_t - b_t)\overline{m}_{t-1} + \text{残差項} \quad \cdots\cdots (3・5)$$

a_t, b_t はその期間の価格 z_t（平均価格よりの偏差）により左右されるものとして次の仮定を設ける。

$$a_t = \alpha_0 + \alpha_1 z_t + u_{1t} \quad \cdots\cdots (3・6)$$

$$b_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + u_{2t}.$$

ただし u_{it} は残差項

3・5式は次のように表わせる。

$$m_t = L_0 + L_1 m_{t-1} + L_2 z_t + \text{残差項} \quad \cdots\cdots (3・7)$$

ただし　$L_0 = b_0 + (\alpha_1 - \beta_1)\pi_0$

$$L_1 = (\alpha_0 - \beta_0) + (\alpha_1 - \beta_1)\overline{z} \quad \cdots\cdots (3・8)$$

$$L_2=\beta_1+(\alpha_1-\beta_1)\overline{m_{t-1}}$$

$$\text{残差項}=(\alpha_1-\beta_1)y_t+u_{1t}m_{t-1}+u_{2t}(1-m_{t-1})$$

$$\pi_0=\mathrm{Cov}(z_t,m_{t-1})-\bar{z}\cdot\overline{m_{t-1}}$$

$$y_t=(z_t-\bar{z})(m_{t-1}-\overline{m_{t-1}})-\mathrm{Cov}(z_t,m_{t-1})$$

残差項を除けば3・7式はコンスタントな係数をもつ通常の lag-model である。係数 L_1, L_2 の意味は3・8式で明らかであるが、次のように変形すれば見易いであろう。

$$L_1=\bar{a}-\bar{b} \qquad \cdots\cdots(3\cdot 9)$$

$$L_2=\alpha_1\overline{m_{t-1}}+\beta_1(1-\overline{m_{t-1}})$$

$$=\mathrm{av.,}\left(\frac{\partial m_t}{\partial z_t}\right);\ \frac{\partial m_t}{\partial z_t}\ \text{の平均}$$

したがって観察期間を通しての、short run の価格弾性値の平均 η_{sp} は、次式で与えられる。

$$\eta_{sp}=L_2\bar{z}/\overline{m_{t-1}} \qquad \cdots\cdots(3\cdot 10)$$

$a_t=a$, $b_t=b$ の時の終局の market share を m_e とすれば

$$(1-a+b)m_e=b$$

a、bがzの関数であれば

$$(1-a+b)\frac{\partial m_e}{\partial z}=m_e\frac{\partial a}{\partial z}+(1-m_e)\frac{\partial b}{\partial z}$$

仮定3・6式のもとで、$z=\bar{z}_t$ で $\frac{\partial m_e}{\partial z}$ を評価すると、

$$\left.\frac{\partial m_e}{\partial z}\right|_{z=\bar{z}_t}=\left\{m_e\alpha_1+(1-m_e)\beta_1\right\}(1-\bar{a}+\bar{b})^{-1}$$

ただし　$\bar{a}+\bar{b}=(\alpha_0-\beta_0)+(\alpha_1-\beta_1)\bar{z}_t$

若し m_e を $\overline{m_{t-1}}$ で近似するものとすれば $(\overline{m_t}\doteqdot\overline{m_{t-1}}$ として$)$

$$\left.\frac{\partial m_e}{\partial z}\right|_{z=\bar{z}_t}=\left\{\overline{m}_{t-1}\alpha_1+(1-\overline{m}_{t-1})\beta_1\right\}(1-\bar{a}+\bar{b})^{-1}=L_2(1-L_1)^{-1}$$

したがって価格条件を観察期間の平均 $\bar{z}$ においた時の long run の価格弾力性 η_{LP} は次のとおり。

$$\eta_{LP}\doteqdot\frac{L_2}{(1-L_1)}\cdot\frac{\bar{z}}{m_{t-1}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3\cdot11)$$

一の1・3式と比較すれば、3・7式はそれと形式的にも内容的にも同等であることが判かる。3・10式、3・11式から知れるように価格弾力性を求める手続きは同一である。3・7式の L_1 は $(1-L_1)$ とすれば distributed lag model の調整係数に相当する。

以上、Variable な Transition matrix の取り扱いに関する Telser〔9〕の接近方法を述べたわけであるが、統計データとして $\{m_{it}\}$ 系列しか利用できない場合でも、Transition matrix の構造についてかなりの情報を引き出すことが出来る。しかし以上の説明から知れるように、Telser のモデルを実際に適用する場合には種々の困難が生じてくる。先ず(イ)、競合品目を特定品目と〃その他〃の二つの状態に縮約せざるを得ぬこと。(ロ)、二分類の場合でも上述の接近方法の成否は仮定3・6式の有効性、換言すれば残差項 (u_{1t}, u_{2t}) の影響如何にかかっている。説明変数が単一変数 z_t でつくされるとしても、たとえば非線形的に a_t, b_t に影響するような複雑な場合には、上述

の方法では処理し難い。説明変数を加法的に追加してゆく場合には3・7式の残差項の内容が問題になってくる。

(ハ)、Distributed lag model の場合でも同じことであるが、3・7式を統計的に推定する際のトラブルも無視できない。

四、Biproportional matrix model の適用

三の議論は利用できる統計データが $\{m_{ti}\}$ の時系列しかない場合についてであった。統計データの availability について次の(ロ)のような有利な条件が追加されたものとしよう。

(イ) $\{m_{ti}\}$ の時系列が利用できる。

(ロ) ある特定時点については Transition matrix の $[a_{ij}]$ が既知である。

$[a_{ij}]$ についての時系列データが揃っているというケースは実際には稀れであり、高々特定時点で既知というのが現実的であろう。ここで問題にしている作付転換過程の場合がちょうどこれに該当する。$\{m_{ti}\}$ の時系列は昭和三一年より各年毎に既知（後述するように正しくは昭和三五年以降）、$[a_{ij}]$ は後出第五、六表に掲げたように昭和三六／三七年および昭和三八／三九年について既知である。そこで当然起こってくる問題であるが、既知となった特定時点の Transition matrix に関するデータを補助情報として、matrix の年次変化の分析に如何に利用するかということである。以下昭和三一年以降の冬作物の作付転換過程を実例にして一つの接近方法を述べてみたい。考え方は既知となった特定年次（以下基準年次と呼ぶ）の $[a_{ij}]$ を基礎にして、与えられた作付率系列 $\{m_{ti}\}$ に見合うように、その他の年次の $[a_{ij}]$ が予測できるようなモデルをたてるということである。

先ず三の仮定㋑、㋺を設けて3・2式が成立しているものとする。ここでは a_{ij} は時間tと共に変化するものとみなしているので、正しくは $a_{ij}^{(t)}$ と記さねばならないが、3・2式を次の第三表のように表わしてみる。

第3表

t-1 ＼ t	1 …… j …… n	計
1	m_{11} …… m_{1j} …… m_{1n}	$m_{1\cdot}$
⋮		
i	m_{i1} …… m_{ij} …… m_{in}	m_{i}
⋮		
n	m_{n1} …… m_{nj} …… m_{nn}	m_{n}
計	$m_{\cdot 1}$ …… $m_{\cdot j}$ …… $m_{\cdot n}$	1.0

ただし $m_{ij}=a_{ij}m_{i,t-1}$

$m_{i\cdot}=m_{i,t-1}$

$m_{\cdot j}=m_{j,t}$

第三表は形式的には相関表と同様な配列を備えている。単一作物の規模別分布で考えれば第三表はまさに前期の規模(i)と今期の規模(j)についての結合分布に他ならない。規模を大・小・中のカテゴリーで分類した場合でも表の内容は変らず相関表と考えてよいはずである。一般に個体がそれぞれn個のカテゴリーをもつところの二つの属性A、Bで識別される場合でも、第三表は属性A、Bの間の相関関係を示す表と考えてよい。若し属性AとBとが全く無関係であれば

$$m_{ij}=m_{i\cdot}\times m_{\cdot j}=m_{ij}^{*} \quad \cdots\cdots(4・1)$$

となるべきである。しからざる場合には $m_{ij}\neq m_{ij}^{*}$ で m_{ij}^{*} で m_{ij} を予測すれば偏りをもつことになる。基準年次の表を $m_{ij(0)}$、比較年次の表を $m_{ij(1)}$ と記そう。

上記の偏りが両年次を通じて不変と考えて次のような仮定を置く。

$$\frac{m_{ij(0)}}{m_{ij(0)}^{*}}=\frac{m_{ij(1)}}{m_{ij(1)}^{*}} \quad \cdots\cdots(4・2)$$

4・2式の左辺は既知であるから、この場合には $m_{ij(1)}$ の予測式として次式を考えるのが自然であろう。

$$m_{ij(1)}=m_{ij(0)}\frac{m_{ij(1)}^{*}}{m_{ij(0)}^{*}}=m_{ij(0)}r_i\times s_j \quad \cdots\cdots(4・3)$$

しかし4・3式は次の制限条件を充すとは限らない。

ただし $r_i=\frac{m_{i\cdot(t)}}{m_{i\cdot(0)}}$　$s_j=\frac{m_{\cdot j(t)}}{m_{\cdot j(0)}}$

$\sum_j m_{ij(t)}=m_{i\cdot(t)}$,　$\sum_i m_{ij(t)}=m_{\cdot j(t)}$

したがって4・3式を修正して次のような予測方式が考えられる。つまり、4・4式、4・5式を充すように

$$\hat{m}_{ij(t)}=m_{ij(0)}r_i s_j \quad \cdots\cdots (4\cdot4)$$

$$\sum_j \hat{m}_{ij(t)}=m_{i\cdot(t)} \quad \cdots\cdots \quad \sum_i \hat{m}_{ij(t)}=m_{\cdot j(t)} \quad (4\cdot5)$$

r_i, s_j (i, j=1, 2…n) を定めることである。この方式は RAS model あるいは biproportional matrix model と呼ばれるものであるが、前者の呼称は stone〔8〕で、後者は Bacharach〔1〕で用いられている。上述の予測モデルは形式的な statistical reasoning によって導出したものであるが、4・4式の biproportional matrix model については適用する対象に応じてそれぞれの意味づけがなされるであろう。stone の場合は投入—産出表の推定モデルとして用いてあるが、$\{r_i\}$ を substitution effect, $\{s_j\}$ を fabrication effect をしめすパラメーターと考えている。作付転換行列の場合は地域間の交通量、通信量の流れを説明するのに用いられている gravitation model に準じて解釈するのが妥当であろう。m_{ij} は i 番目の作物より j 番目の作物に流れる面積の相対数であるが、これを決定する要因として origin の作物(i)の size effect と destination の作物(j)の attraction を考える。当然これらは各時点で変化する。

さらにそれぞれの組合せ (i.j) に対して個有の interaction effect c_{ij} が作用するものとする。c_{ij} は地域間の交

通量でいえば距離の効果に当るもので、作付転換の場合にはその時点で採用されている作付体系や栽培技術で決まるものである。さらに c_{ij} は不変な常数とみなす。size effect と相手作物の attraction の効果は相乗的と想定して

$$m_{ij}=c_{ij}(x_i)^{\alpha}(y_j)^{\beta} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4 \cdot 6)$$

ただし　x_i：作物(i)のもつ potential size

　　　　y_j．作物(j)の attraction index

この場合には c_{ij} が時間的に不変である限り、4・4式が成立するのは明らかであろう。

4・4式の係数 r_i, s_j は次のように逐次近似で導出することが出来る。基準年次の matrix を $M^{(0)}=[m_{ij(0)}]$ と置くと

$$M^{(1)}=\begin{pmatrix} r_1' & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r_n' \end{pmatrix} M^{(0)}, \quad ただし \quad r_i'=m_{i\ (1)}/\sum_j m_{ij(0)}$$

$$M^{(2)}=M^{(1)}\begin{pmatrix} s_1' & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_n' \end{pmatrix}, \quad ただし \quad s_j'=m_{\cdot j(1)}/\sum_i m_{ij}^{(1)} \quad [m_{ij}^{(1)}]=M^{(1)}$$

$M^{(1)}$ は行和について制約条件（4・5式）を、$M^{(2)}$ は列和について4・5式を充たしている biproportional matrix である。次ぎに $M^{(2)}$ を出発点にして上述の手続きを反覆してゆく。したがって t 回目のラウンドでの手続きは一般に次のように表わせる。

$$M^{(2t+1)}=\begin{pmatrix} r_1^{t+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r_n^{t+1} \end{pmatrix} M^{(2t)}, \quad r_i^{t+1}=m_{i\cdot(1)}/\sum m_{ij}^{(2t)} \quad M^{(2t)}=[m_{ij}^{(2t)}]$$

$$M^{(2t+2)}=M^{2t+1}\begin{pmatrix} s_1^{t+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_n^{t+1} \end{pmatrix}\quad s_j^{t+1}=m_{.j}^{(t)}\Big/\sum_i m_{ij}^{(2t+1)}\quad M^{2t+1}=\left[m_{ij}^{(2t+1)}\right]$$

$M^{(2t+2)}$ の収束値が求める〔$\hat{m}_{ij(t)}$〕である。解の一意性および上記の反復法の収束性については、Bacharach〔1〕で詳しく論じられている。4・4式および4・5式の予測方式を実際に作付転換行列に適用する場合、制約条件4・5式について若干問題がある。一つは3・1式で述べたように、4・5式の列和に関する条件式は、正しくは

$$\sum_i \hat{m}_{ij(t)}=m_{.j(t)}-u_{.j(t)}\quad (j=1,2,\cdots n)$$

{$u_{.j(t)}$} の系列は未知であるので、4・5式のような条件式で代置せねばならぬこと。第二は {m_{ij}} の系列は昭和三五年以降に限られていること。以下述べる計測では出来るだけ長い系列を作るため、耕地面積の統計が利用できる昭和三一年度までカバァーしてある。昭和三一年から昭和三五年までの期間の {m_{ij}} は近似系列であるので、これらの誤差は制約条件の誤りとして当然 $\hat{m}_{ij(t)}$ に影響するに違いない。

第四表は昭和三五年以降について一二の作物部門（不作付地も含めて）による冬期の耕地占有率、すなわち {m_{ij}} 系列を掲げたものである。以下の分析では六部門（麦類、なたね、春植ばれいしょ、まめ類、その他作物、不作付地）に統合されているが、これは計算上の便宜である。なお第四表は田・畑合計の数字であり、対象地域も北海道を除いた都府県全体に統合されている。三一年から昭和三五年までの期間については第四表の系列が作成されていないので、その他部門の占領率を麦類、なたね、春植ばれいしょ、まめ類の占領率（総耕地面積と作付面積の比で代用）を控除した残差で代用してある。基準に採った〔a_{ij}〕は昭和三六／三七年の期間のもので、清水〔5〕の後出第七表を用いた。この期間の転換表を基準にすることには多少問題があるが、この期間の表を基礎にした分析がいろいろ行

第4表　冬期における土地利用状況
(都府県の合計)

(単位：10^{-6})

	昭和35年	36年	37年	38年	39年	40年	41年
小麦	118,388	128,097	127,026	114,655	100,627	94,646	84,677
六条大麦	63,214	52,126	44,830	38,894	33,011	27,244	24,105
二条大麦	16,423	19,109	22,841	25,105	22,824	23,103	22,557
裸麦	86,811	67,045	55,480	50,514	42,321	36,817	34,155
なたね	36,453	37,571	33,795	27,822	24,110	17,363	13,765
春植ばれいしょ	21,642	22,611	23,531	22,996	24,192	22,385	21,608
まめ類	10,499	9,777	10,041	8,841	8,289	8,138	7,574
永年作物	95,154	100,871	103,414	107,578	111,202	117,051	121,081
野菜円芸作物	23,395	25,911	26,898	29,688	30,970	32,082	30,944
飼肥料作物	60,816	61,093	64,284	60,897	61,756	60,760	62,078
その他作物	9,774	10,931	11,238	12,877	14,781	10,414	12,395
不作付地	457,431	464,858	476,621	500,132	525,917	549,998	565,060
合計	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000	1,000,000

資料・農林省統計調査部の作物統計より，作成に関しては同部の原田弘氏に負うた．

第5表　昭和36/37年の作付転換マトリックス
(都府県の合計)

(単位：10^{-5})

昭和36年＼昭和37年	麦類	なたね	春植ばれいしょ	まめ類	その他作物	不作付地
麦類	91,802	402	315	172	2,667	4,643
なたね	3,266	85,082	371	203	2,696	8,383
春植ばれいしょ	748	132	95,497	185	1,237	2,202
まめ類	1,057	421	423	92,967	2,157	2,976
その他作物	739	102	135	90	96,353	2,581
不作付地	932	148	114	45	910	97,851

資料　清水〔5〕の第7表を6部門に統合したものである．

第6表　昭和38/39年の作付転換表
（都府県の合計）

（単位：10^{-5}）

昭和38年＼昭和39年	麦　類	な た ね	春植ばれいしょ	ま め 類	その他作物	不作付地
麦　類	85,280 85,154	532 482	641 528	190 142	3,908 4,428	9,449 9,265
な た ね	3,024 2,322	79,498 80,266	737 507	295 144	4,941 3,591	11,505 13,170
春植ばれいしょ	978 400	178 100	93,955 95,625	178 100	2,311 1,213	2,400 2,562
ま め 類	1,643 1,018	470 543	470 758	85,210 87,229	4,930 4,016	7,277 6,436
その他作物	720 405	97 74	126 146	29 48	95,185 96,283	3,843 3,044
不作付地	491 425	86 90	90 99	33 20	806 779	98,494 98,587

注．各行の上段が実際値，下段が予測値　実際値は農林省統計調査部「昭和39年度，作付増減ならびに転換状況」（昭和40年3月）によった．

なわれているので、この点も考慮して採用したものである。第五表はこの期間の転換表を六部門にまとめたものである。

昭和三七年以降では昭和三八／三九年の期間の〔a_{ij}〕だけが現在のところ判っているので、先ず4・4式、4・5式によってこの期間の〔a_{ij}〕を予測してみる。第六表がその結果であるが、各cell の中で上段が実際値、下段が biproportional model による予測値を表わしている。個々の a_{ij} について予測の精度を問題にする限り、第六表から直ちに読みとれるわけであるが、6×6の組合せ全部を通して、予測の精度を測かろうとするには、適当な尺度を用いねばならない。ここでは、Theil〔10〕が information inaccuracy と呼んでいる尺度を用いることにする。これは情報理論に基づいた発想で次のように定義されるものである。

$$I=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\log\frac{m_{ij}}{\hat{m}_{ij}}\quad\cdot\cdot(4\cdot7)$$

ただし m_{ij} は実際値，$\hat{m}_{ij}$ は予測値

$m_{ij}=\hat{m}_{ij}$ の時 $I=0$ となるが、一般には $I\geqq 0$ m_{ij} と $\hat{m}_{ij}$ の差が大きくなればそれに応じてIも大きくなる。log の底には2を用いるのが慣例で、この場合には「bit」という単位で表現され

第7表　昭和31/32年 以降の作付転換状況
（都府県の合計）

（単位：10^{-3}）

	麦類		なたね		春植ばれいしょ		まめ類		その他作物		不作付地	
	a_{ii}	a_{ji}	a_{ii}	a_{ji}	a_{ii}	a_{ji}	a_{ii}	a_{ji}	a_{ii}	a_{ji}	a_{ii}	a_{ji}
昭和31/32	916	10 28	918	4 47	914	1.01	0 905	0 81	0 987	70 93		
32/33	941	15 59	823	1 79	939	1 34	0 922	C 87	0 984	60.44	不作付地を含む	
33/34	945	17 15	800	1.42	924	1 04	0 914	0 77	0 984	59 99		
34/35	934	12 72	915	3.88	935	1 20	0 908	0 72	0 984	56 99		
35/36	911	9.73	918	4 28	955	1 99	0 877	C 59	0 964	19 62	0.974	36 37
36/37	918	9.95	851	2.11	955	1 86	0 930	0 97	0 964	16.02	0 979	40.06
37/38	894	7 59	781	1.47	928	1 23	0 840	0 42	0 960	17.03	0 985	58 13
38/39	852	4.94	803	1.83	956	2 27	0.872	0 60	0 963	19 87	0 986	64 98
39/40	887	6 99	686	0.84	896	0 78	0.899	0 70	0 955	14 71	0 987	64.49
40/41	883	6 13	735	1.02	923	1 02	0.872	0 49	0 968	17 19	0 984	52.14

る。4・4式、4・5式ですなわち biproportional matrix model で昭和三八／三九年の〔a_{ij}〕を予測した場合の information inaccuracy は14×10^{-4} bit. 4・1式による予測は作付転換の場合には問題にならないので、昭和三六／三七年の〔a_{ij}〕が不変であるとして予測した場合と比較すると、この場合の予測の inaccuracy は118×10^{-4} bit となり、biproportional model に比べて大体一桁 inaccuracy が増大することになる。上記の計測は六部門で考察したが、これを一二部門に分割した場合予測力に与える影響、さらに予測を昭和三九／四〇年、四〇／四一年へと延長した場合の問題、これらが明らかにされるまで biproportional model による予測の正しい評価を下すことは出来ない。

第七表は昭和三一年以降の各期間における転換行列を上述の方法で予測した結果を集約したものである。

a_{ii} は反覆して作物(i)に作付される割合、a_{ji} はその他の作物から作物(i)に転換される割合、すなわち

$$a_{ji}=\sum_{k\neq i} a_{ki} m_k \,/\, (1-m_{i\cdot})$$

第八表は部門を小麦、大麦(六条大麦、二条大麦)、裸麦、その他

作物、不作付地と分割して予測した場合の結果を要約したものである。麦類全体の a_{ii} が第七表のそれと殆んど一致する点に注目されたい。従来の分析からも類推できることであるが、第七表および第八表の a_{ii}, a_{ji} は価格条件によって影響されるであろう。各作物の前年度の価格指数（農産物価格指数で除して）との単相関係数を求めると

	a_{ii}	a_{ji}
麦類	〇・九一一六	〇・九二二四
なたね	〇・九〇六七	〇・八六四二

（以上第七表より）

麦類	〇・九二二六	〇・九二九三
小麦	〇・七一三〇	〇・五四〇〇
大麦	〇・八三四六	〇・八一八八
裸麦	〇・八〇〇七	〇・六七五二
小麦・裸麦	〇・九三五七	〇・八五五七

（以上第八表より）

最後に麦類の $\{m_{ij}\}$ 系列を三で述べた Telser's model にした

第8表　昭和31/32年以降の麦部門の作付転換状況
（都府県の合計）

（単位・10^{-3}）

	麦類		小麦		大麦		裸麦	
	a_{ii}	a_{ji}	a_{ii}	a_{ji}	a_{ii}	a_{ji}	a_{ii}	a_{ji}
昭和 31/32	918	9 55	874	8.46	882	7 34	884	4 76
32/33	943	14 36	898	9.43	911	8 86	907	5 69
33/34	949	14 94	916	11 01	921	7 67	901	5 02
34/35	936	11 67	915	11.22	892	5 60	883	4 25
35/36	908	10 62	936	19.48	834	5 18	752	1 83
36/37	918	9 95	914	11 79	874	6 31	805	2 45
37/38	894	7.40	859	6.43	862	5 99	849	3 62
38/39	853	4 69	834	5.76	816	3.91	790	2.55
39/40	888	6.78	878	7 06	834	4.05	814	2 50
40/41	883	6 17	849	4 84	850	4.10	846	3.13

がって計測した結果を掲げておく。

a_{ii} および a_{ji} の変動が仮定3・6式にしたがうものとすれば、3・9式によって観察期間を通じての（$a_{ii}-a_{ji}$）の平均や価格弾力性を間接的に推定できる。一方 biproportional model によって（a_{ii}, a_{ji}）の時系列が第七表あるいは第八表のように作成されているので、この系列から直接（$a_{ii}-a_{ji}$）の平均などが求められる。本来は一致すべきものであるが、両者とも特定の仮定のもとで導出されたものであるからお互いに喰い違った結果が出るのは当然である。

ここで用いた Telsers' model は次の仮定によったものである。

$$a_{ii}^{(t)}=\alpha_0+\alpha_1 x_t+\alpha_2 z_{t-1}+u_{it} \quad \cdots\cdots(4\cdot8)$$
$$a_{ji}^{(t)}=\beta_0+\beta_1 x_t+\beta_2 z_{t-1}+u_{jt}$$

ただし　x_t は擬変数で

$x_t=0$　昭和31～36年まで

$=1$　昭和36～41年まで

4・8式では変数 x_t が追加されているが、これは昭和三六年以前と以後では a_{ii}, a_{ji} の推定方法に差異があったこと、さらに time trend の効果も期待しての理由からである。z_t は各作物の価格指数（農産物価格指数で除して）である。3・7式に対応する推定式は

$$m_t=L_0+L_1 m_{t-1}+L_2 z_{t-1}+L_3 x_t+\text{残差項} \quad \cdots\cdots(4\cdot9)$$

ただし　$L_1=\overline{a_{ii}^{(t)}}-\overline{a_{ji}^{(t)}}$

$$L_2 = \alpha_2\overline{m_{t-1}} + \beta_2(1-\overline{m_{t-1}}) \cdots\cdots\cdots\cdots (4 \cdot 10)$$

$$L_3 = \alpha_1\overline{m_{t-1}} + \beta_1(1-\overline{m_{t-1}})$$

4・9式を通常の最小自乗法で推定した結果をまとめたのが第九表である。一方、第七表および第八表の $(a_{ii}^{(t)}, a_{ji}^{(t)})$ を用いて4・8式のパラメターを推定した結果が第一〇表である。第一〇表の L_1^*, L_2^* および L_3^* は推定された α_1, や β_1 を4・10式に代入して導いたものである。上述の説明で知れるように、第九表の L_1 は第一〇表の L_1^* と比較可能な数値であり、本来は一致すべきものである。この比較で先ず目立ったことは大麦の L_1 が著しく過少に推定されている点である。biproportional model の偏りを考慮に入れても第九表の大麦の L_1 は推定方法による過少偏異を蒙っているものと考えざるを得ない。大麦に対する4・9式の決定係数 (R) は 0 9306 $= R^2$ と高くなっているが、係数 L_1 が正当に推定されているとは思えない。価格弾力性は3・10式にしたがって求めたものである。第一〇表に掲げたパラメター推定の信頼度は測定できないが、4・9式の R^2 に対応する量は求めることが出来る。

$$m_t = a_{ii}m_{t-1} + a_{ji}(1-m_{t-1}) + \varepsilon_t \cdots\cdots\cdots\cdots (4 \cdot 11)$$

$$a_{ii}^* = \hat{a}_{ii} + u_1, \quad a_{ji}^* = \hat{a}_{ji} + u_2$$

$$a_{ii} = a_{ii}^* + b_1, \quad a_{ji} = a_{ji}^* + b_2$$

ただし　a_{ii}^*, a_{ji}^* は biproportional model による予測値。b_1, b_2 はその偏り。$\hat{a}_{ii}$, a_{ji} は回帰項,

u_i は残差。

4・11式は変形されて

第9表　Telser's model (4・9式) の係数の推定

	L_1	L_2	L_3	価格弾力性
麦類	0.8085	0.1971	0.0101	0.7807
小麦	0.9535	0.0198	−0.0054	0.1653
大麦	0.2341	0.0773	−0.0021	1.0741
裸麦	0.9047	0.0399	0.0055	0.5215

第10表　biproportional matrix model による諸係数の計算

諸係数		麦類	小麦	大麦	裸麦
a_{11}	α_1	0.0469	0.0138	0.0740	0.0482
	α_2	0.5225	0.3414	0.6466	0.4773
a_{j1}	β_1	0.0036	−0.0015	0.0027	0.0010
	β_2	0.0531	−0.0049	0.0265	0.0086
L_1*		0.8989	0.8778	0.8618	0.8395
L_2*		0.1747	0.0351	0.0703	0.0428
L_3*		0.0148	0.0003	0.0077	0.0044
価格弾力性		0.6919	0.2931	0.9768	0.5594
ウエイト	$\hat{m}$	0.2591	0.1155	0.0706	0.0730
	$1-\hat{m}$	0.7409	0.8845	0.9294	0.9270

$$m_t = m_{t-1}(\hat{a}_{11} - \hat{a}_{j1}) + \hat{a}_{j1} + 残差項 \quad \cdots\cdots\ \cdots\cdots\ \cdots\ \cdots\cdots(4・12)$$

ただし残差項 $= m_{t-1}u_1 + (1 - m_{t-1})u_2$

4・12式の残差平方和を求めれば4・9式のR^2に比較できる量が導出できる。麦類の場合を例にとると4・9式によると$R^2=0.0062$。4・12式では$R^2=0.0030$となる。biproportional model の方が適合度はよい。

4・9式のように lagged variable を含んだ推定式の推定問題は distributed lag model の場合にしばしば論議されている問題と同じ性質のものであるので、ここでは触れない。

トラブルを起こす第一の要因は4・9式の残差項にあるわけであるから、$a_{11}^{(t)}$、

$a_{j1}^{(t)}$ の変動を説明するモデルが正しく定式化されれば解決するわけであるが、これはいうべくして難かしい方法である。これに代る一つの方法は推定すべき係数、とくに L_1 について外部的な情報をもつことであろう。

distributed lag model によれば $0 \leq L_1 \leq 1$ の条件しか与えられない。したがって上述の大麦の L_1 の推定値はこの場合正当化されるが、Telser's model では4・10式にしたがって規定されるものである。a_{11} や a_{j1} は調整係数と違って本来直接観測可能なパラメターであるから、L_1 を外部的にチェックすることは可能である。これが Telser's model の大きな利点でなかろうか。

以上、$\{m_{ij}\}$ 系列に加えて〔a_{ij}〕に関する部分的な補助データが与えられていた場合、その利用方法として bi-proportional matrix model の適用を論じたわけであるが、より有効な現実的な利用方法が他にあるかどうか。さらに作物間の転換行列として作物間の net flow しか表わさぬマトリックス系列が与えられた場合その利用方法—これらが次いで検討されねばならぬ問題であろう。

参考文献

〔1〕 Bacharach, M., "Estimating nonnegative matrices from marginal data," *International Economic Review*, September, 1965, pp. 294–310.

〔2〕 Bartlett, M S, *Stochastic processes*, Cambridge University Press, 1956

〔3〕 Patil, V T., "The consistency and adequacy of the Poisson-markoff model for density fluctuations," *Biometrica*, 44, pp. 43–56.

〔4〕 Ruben, H, "Some aspects of the emigration-immigration process," *Ann Math. Statist* 33 111-129.

〔5〕 清水良平「冬期耕地利用における作付競合の動向」『農林統計調査』昭和三八年五月。

〔6〕 清水良平「作物別耕地利用の動向分析ーマルコフ・プロセス分析による」『農林統計調査』、昭和三九年七月。

〔7〕 Steindl, J, *Random Processes and The Growth of Firms*, charles griffin, 1965

〔8〕 Stone, R and J A C Brown, *A computable model of Economic growth*, London, 1962

〔9〕 Telser, L G, "The demand for branded goods as estimated from consumer panel data," *The Review of Economics and Statistics*, 44, pp 300-24

〔10〕 Theil, H., *Applied Economic Forcasting*, North Holland, 1966.

〔11〕 土屋圭造『農業経済の計量分析』、勁草書房、一九六二。

〔12〕 唯是康彦「農業生産における価格反応」『農業総合研究』第一九巻第一号。

〔13〕 Wolf, J.N., "A model for the long-run theory of Value." *Review of Economic Studies*, Oct 1961

（研 究 員）