食料需要分析と線型支出体系

三枝義清
佐々木康三

一　はしがき

最近の需要分析は、実証分析と理論の間のギャップを埋めようとしている点に大きな特色がある。従来の需要分析では、単品目ごとの統計的分析が支配的であり、理論的な裏付けが稀薄であったようにおもわれる。統計的分析における個々の需要関数は、所得および当該価格など二、三の主要変数からなる関数として推定され、品目ごとの所得および価格弾力性の計測に大きな関心が払われた。

需要分析に関するこれらの事実は、わが国のみならず、諸外国においてもある程度共通している。また食料需要

分析の分野においても、理論との遊離が見られた。しかしながら、需要分析の関心はこのような Single equation approach を中心とした統計的需要分析から、しだいに論理的整合性をもつ需要体系の分析に変わろうとしている。

需要体系としての若干の実証分析の中で、R・ストーン（Stone：1954 a，1954 b）による線型支出体系の分析が古典的かつ代表的計測例としてあげられる。ストーンの線型支出体系の原型は、効用不変の生計費指数を導出する過程で明らかにされたL・R・クライン、H・ルービン（Klein and Rubin：1947〜48）の需要体系である。クライン、ルービンは最も基本的な形での線型支出体系をはじめて経済分析に取り入れ、理論的制約条件を付加することによって、新しい需要体系を確立した。かれらの分析結果はP・A・サムエルソン（Samuelson：1947〜48）によってさらに検討が加えられ、経験的意味づけがなされた。また同時に、需要体系の基礎となる効用関数の存在することが明らかにされた。R・C・ギアリー（Geary：1949〜50）は、クライン、ルービンの需要体系をもとにして効用関数を特定化する過程をくわしく議論し、効用関数型を明示したので、その関数型は「ストーン・ギアリー効用関数」として知られている。

クライン、ルービン体系は、ストーンによって「線型支出体系」と名づけられ、積極的な実証分析が行なわれるにおよんで「ストーンの線型支出体系」として知られるようになった。R・フリッシュ（Frisch：1954）は、伝統的需要理論の見地に立って、ストーンの精緻化された理論構成に明快な解説を与えている。

以上のように、ストーンの線型支出体系では、需要関数が特定の形で表現され、それに対応して一定の効用関数が存在している。いいかえれば、特定の効用関数を仮定することによって、需要関数型が理論的に決定されるのである。従来の統計的需要分析では、需要関数型の選択問題は統計的な問題として取り扱われただけで、需要理論と

はほとんど無関係のまま処理されていた。

線型支出体系に関する最近のおもな展開は、推定問題に関連するものである。その一つは、統計学的見地からの望ましい推定手続きの開発であり、いま一つは推定を単純化するための需要体系の再構成である。本論の前半は後者の問題に関するものである。線型支出体系の推定上の単純化は、近年C・E・V・レサー(Leser: 1960, 1961)およびA・A・パウエル(Powell: 1966, 1968)によって行なわれた。

レサー、パウエル両体系は、変数およびパラメータ間の諸関係を各変数の平均値における local な関係としてとらえ、理論的条件および単純化のための仮定を導入することによって未知パラメータの数を少なくし、推定手続きを比較的簡単にしている。しかしながら、レサー体系は線型支出体系の推定問題を大幅に単純化してはいるが、効用関数を基礎にした体系ではないことが証明される。したがってそれは、需要体系の実際的計測に重点をおいたものであり、統計的需要分析の範ちゅうに属する体系である。パウエルの場合も、レサー体系の基本的仮定をおきかえただけで、その他の点ではレサー体系の理論展開と変わらない。そのような意味で、パウエル体系は「平均値」における需要体系の統計的近似といえるが、他方ストーン体系との共通性から、効用関数を基礎にした需要体系との結びつきをもっている。

本論の計測では、レサー、パウエル両体系を統計的需要分析モデルとみなし、均衡の二階の条件まで立ち入った議論はしない。それは、ストーン体系にみられるように、二階の条件を加味した場合には、対象財がすべて上級財に限られ、補完関係が無視されるといった厳しい条件が付与されるからである。本論の実証分析に先立って、レサーおよびパウエル体系の問題点を指適し、両体系を折衷した形の新しい体系を提示する。それはパウエル体系を推

定上さらに単純化したものなので、ここでは「パウエル近似体系」とよぶことにする。この近似体系にしたがって、食料需要体系を計測し、食料需要パターンを明らかにする。また、レサー、パウエル両体系の分析結果との比較、検討を行なう。

以下、ストーン、レサー、パウエルの三つの体系を理論的に検討し、それぞれの特徴および諸関係を分析する。そのあとで、実証分析の面での諸問題を明らかにして食料需要分析に適した分析体系をさぐり、これを実証分析に援用しようとするのが本論の主題である。

二　線型支出体系の一般型――ストーン体系

1　理論構成

線型支出体系の最も基本的な表現は、2・1式のような関数型で表わされる。これを変形することによって、需要体系は2・2式のように与えられる。

(2.1)　$p_ix_i=\sum_j a_{ij}p_j+b_iE,\ (i,j=1,2,\dots,k)$

(2.2)　$x_i=\sum_j a_{ij}\dfrac{p_j}{p_i}+b_i\dfrac{E}{p_i}$

p_i, x_i は i 財の価格および数量、E は所得（厳密には、総支出）、a_{ij}, b_i は価格および所得係数である。2・1、2・2式には、k^2+k 個の未知パラメータが含まれている。未知パラメータの数を減少させるために、加法性、同次性、対称性の理論的制約条件を付加する。

加法性はパラメータに対して下記の制約を与える。

$$\left.\begin{array}{ll}(2.3) & \sum_i a_{ij}=0 \\ (2.4) & \sum_i b_i=1\end{array}\right\}$$ （加法性条件）

所得および価格弾力性 E_i, e_{ij} は、２・１式から２・５、２・６式のように表現される。

(2.5) $E_i=\dfrac{b_iE}{p_ix_i}$

(2.6) $e_{ij}=\dfrac{a_{ij}p_j}{p_ix_i}-\delta_{ij}$,　（$\delta_{ij}$: クロネッカーのデルタ）　ただし，$\delta_{ij}=\begin{cases}1,(i=j)\\0,(i\neq j)\end{cases}$

同次条件は、２・５、２・６および２・１式から、つねに満たされることが明らかであり、直接にはパラメータを制約しない。

(2.7) $Ei+\sum_j e_{ij}=0$,　(2.7)′ $\sum_j W_j\alpha_{ij}=0$,　（同次条件）

α_{ij} は２・８式によって定義される代替弾力性であり、W_i は i 財の支出比率である。

(2.8) $\alpha_{ij}=Ei+\dfrac{1}{W_j}e_{ij}$

対称関係は、代替弾力性の対称性にほかならず、パラメータに対してつぎのような制約を与える。(1)

(2.9) $\dfrac{a_{ij}}{\delta_{ji}-b_i}=\dfrac{a_{mj}}{\delta_{jm}-b_m}$,　$(i,j,m=1,2,\dots,k)$,　（対称関係）

上式の左辺は、いかなるjについてもiに依存せず、jだけに依存する定数（たとえばβ_j）に等しい。同様に、右辺はいかなるjについてもmとは独立で、jだけに依存する定数に等しい。したがって次式が成立する。

$$(2.10)\quad a_{ij}=(\delta_{ji}-b_i)\,\beta_j$$

対称関係は、2・10式から明らかなように、パラメータに対してk^2個の制約条件を与える。k^2個の未知パラメータa_{ij}はb_i、β_iの$2k$個のパラメータによって説明される。しかしながら、b_iについては2・4式が成立するから、独立なパラメータは$2k-1$個である。2・10式のa_{ij}に関しては、2・4式が成立するとき、2・3式の条件はつねに満たされる。2・1、2・2式は、2・10式を代入することによってつぎのように書きかえられる。

$$(2.1)'\quad p_ix_i=p_i\beta_i+b_i(E-\sum_j p_j\beta_j)$$

$$(2.2)'\quad x_i=\beta_i+\frac{b_i}{p_i}(E-\sum_j p_j\beta_j)$$

また、2・5、2・6式は下記のように表現される。

$$(2.5)'\quad E_i=\frac{b_i}{W_i}$$

$$(2.6)'\quad e_{ij}=\frac{(\delta_{ii}-b_i)p_j\beta_j}{p_ix_i}-\delta_{ij}$$

2・1式は通常ストーンの線型支出体系とよばれているが、2・1式から(2.1)′式への変換はつぎのように要約される。同次条件をつねに満足する線型支出体系2・1のパラメータに対して、k^2個の対称関係を付加するとともに、k個の新しいパラメータβ_iを導入する。その場合、未知パラメータの数は、k^2+k個から$2k$個に削減される。

さらに加法性条件が一個付加され、独立な未知パラメータは $2k-1$ 個になる。このように、加法性、同次性および対称性の三つの条件を満足する線型支出体系は、ストーン体系（2.1)′式に限られる。

2　ストーン・ギアリー効用関数の導出

線型支出体系が（2.1)′式によって与えられるとき、需要体系は（2.2)′式によって表わされるが、この需要体系は2・16式のような効用関数を基礎にしている。その関数をストーン・ギアリー効用関数とよんでいる。

(2.1)′式を書きかえて、

(2.11)　$p_i(x_i-\beta_i)=b_i\sum_j p_j(x_j-\beta_j)$

下記のように x_i、E を新しい変数 x_i^*、E^* で置換して、2・11式を（2.11)′式のように書きかえる。

(2.12)　$x_i^*=x_i-\beta_i$,　$(x_i^*>0)$

(2.13)　$E^*=\sum_j p_j x_j^*$　$(E^*>0)$

(2.11)′　$p_i x_i^*=b_i E^*$

均衡点（$x_1,\cdots,x_k$）では、$dU=0$ から、次式が成立する。

(2.14)　$\sum_j p_i dx_i^*=0$

上式に（2.11)′式を利用すると、

(2.15)　$\sum_j \frac{b_i}{x_i^*}dx_i^*=0$

2・15式の偏微分方程式を解いて整理すれば、効用関数 $U(x_1,\cdots,x_k)$ はつぎのように表わされる。(2)

(2.16)　$U=\Pi_{i=1}^{k}(x_i-\beta_i)^{b_i}$

$(b_i>0,\ \sum_i b_i=1,\ x_i-\beta_i>0)$

２・16式の効用関数から２・２式の需要体系を導くことが可能である。パラメータβ_iはi財の基礎消費量[3]とよばれる。したがって、ストーン体系の理論構造は、まず第一に各財の基礎消費量に相当する分を購入し、残余の所得は一定比率で各財の購入に当てる仕組みになっている。効用関数は非同次であるから、K・吉原（Yoshihara: 1969）によって指摘された第四の公準、すなわち、すべての所得弾力性は同時に１にならないという条件が満足される。

注(１)　対称関係から、

$$E_i+e_{im}/W_m=E_m+e_{mi}/W_i,\ (i,m=1,\cdots,k)$$

両辺に W_iW_mE を乗じて２・５、２・６式を代入すると、

$$b_ip_mx_m+a_{im}p_m=q_mp_ix_i+a_{mi}p_j$$

両辺の第１項に２・１式を代入すると、

$$b_i\sum_j a_{mj}p_j+a_{im}p_m=b_m\sum_j a_{ij}p_j+a_{mi}p_i,\ (j=1,\cdots,k)$$

$a_{im}p_m=\sum_j a_{ij}p_j\delta_{jm}$ であるから、上式を書きかえると、

$$\sum_j(b_ia_{mj}+a_{ij}\delta_{jm}-b_ma_{ij}-a_{mj}\delta_{ji})p_j=0$$

$$b_ia_{mi}+a_{ij}\delta_{jm}-b_ma_{ij}-a_{mj}\delta_{ji}=0$$

$$\therefore\ \frac{a_{ij}}{\delta_{ji}-b_i}=\frac{a_{mj}}{\delta_{jm}-b_m}$$

（２）　２・15式を積分する。

$$\sum_i b_i\int\frac{dx_i^*}{x_i^*}=C,\ (C：積分定数)$$

$$\sum_i b_i \log|x_i^*| = \log|c \cdot U|,\ (c：定数)$$

Uは正であればよいから、$c=1$, $x_i'>0$ とすれば、

$$U=\Pi_{i=1}^{k}(x_i-\beta_i)^{b_i}$$

効用関数の構造上の条件として、つぎの三つの条件が付与される。

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & b_i>0 \text{…各財の限界効用は正。} \\ (2) & \sum_i b_i=1 \\ (3) & x_i-\beta_i>0\end{array}\right\}\text{…ストーン体系との整合性。}$$

効用関数が凹であるための条件（$0<b_i<1$）は、最初の二つの条件によって満足される。

（3）最小必要量（minimum guantity）あるいは拘束数量（committed quantity）ともよばれる。

三　線型支出体系の単純化——レサー体系とパウエル体系

レサー、パウエル両体系の諸仮定とそれらの理論的帰結について簡単に説明しよう。ストーンの場合と同様、線型支出体系の最初の一般式から議論をはじめる。表示記号は前節のものと同じである。

(3.1)　$p_i x_i=\sum_j a_{ij}p_j+b_iE$,　$(i=1,2,\ldots,k)$

(3.2)　$x_i=\sum_j a_{ij}\dfrac{p_j}{p_i}+b_i\dfrac{E}{p_i}$

単純化のため、諸変数はそれぞれ、観測期間の平均水準で評価し、支出体系は各変数の平均値で線型化された体系として議論する。加法性はパラメータに対してつぎの条件を与える。

(3.3)　$\sum_i a_{ij}=0$

(3.4)　$\sum_i b_i=1$　（加法性条件）

所得および価格弾力性 E_i, e_{ij} は各変数の平均値（$\bar{x}_i, \bar{p}_i, \bar{E}$）で評価すると、３・１式からつぎのように示される。

(3.5)　$\bar{E}_i=\dfrac{b_i}{\bar{W}_i}$

(3.6)　$\bar{e}_{ij}=\dfrac{a_{ij}\bar{p}_j}{\bar{p}_i\bar{x}_i}-\delta_{ij}$

同次条件は下記のように表わされる。

(3.7)　$\bar{E}_i+\sum_j \bar{e}_{ij}=0$,　(3.7)′　$\sum_j \bar{W}_j\bar{\alpha}_{ij}=0$,　（同次条件）

$\bar{\alpha}_{ij}$ は平均代替弾力性で、３・８式によって定義される。

(3.8)　$\bar{\alpha}_{ij}=\bar{E}_i+\dfrac{1}{\bar{W}_j}\bar{e}_{ij}$

価格係数 a_{ij} は、３・８式に３・５、３・６式を代入することによって、

(3.9)　$a_{ij}=\bar{\alpha}_{ij}\bar{W}_i\bar{x}_j-b_i\bar{x}_j+\delta_{ij}\bar{x}_j$

以下、レサーおよびパウエル体系に導入される付加的仮定とそれらから導かれる理論的帰結を明らかにする。

(一) レサー体系

1 理論構成

この体系の基本的仮定は、平均交叉代替弾力性が一定ということである。それはまた、対称関係についての付加的仮定である。

(3.10)　$\bar{a}_{ij}=\bar{a}_{ji}=\bar{a}$, ($i\neq j$, $\bar{a}$：定数)　(対称関係)

価格係数 a_{ij} は、(3.7)、3・10式を3・9式に応用すると、次式によって表わされる。

(3.11)　$a_{ij}=-\bar{a}(\delta_{ij}-\overline{W}_i)\bar{x}_j-b_i\bar{x}_j+\delta_{ij}\bar{x}_j$

3・1式に k^2-k 個の対称関係および k 個の同次条件を付加することによって、k^2 個のパラメータ a_{ij} は $\bar{a}$、b_i の $k+1$ 個のパラメータによって説明される。$\bar{a}$ はその過程で導入された新しいパラメータである。価格弾力性 $\bar{e}_{ij}$ は、3・11式を3・6式に代入して、

(3.12)　$\bar{e}_{ij}=-\bar{a}(\delta_{ij}-\overline{W}_i)\dfrac{\overline{W}_j}{\overline{W}_i}-b_i\dfrac{\overline{W}_j}{\overline{W}_i}$

所得弾力性 $\bar{E}_i$、価格係数 a_{ij}、価格弾力性 $\bar{e}_{ij}$ は、それぞれ3・5、3・11、3・12式によって求められる。

つぎに、パラメータの推定問題について考察しよう。最初の線型支出体系3・1は、3・11式を代入することによって、次式のように表現される。

(3.13)　$y_i=\bar{a}z_i+b_iu$

ただし、変数 y_i, z_i, u は下記のように定義される。

(3.14)　$y_i = p_i x_i - p_i \bar{x}_i$,　($\bar{y}_i = 0$)

(3.15)　$z_i = \overline{W}_i \sum_j p_j \bar{x}_j - p_i \bar{x}_i$,　($\bar{z}_i = 0$)

(3.16)　$u = E - \sum_j p_j \bar{x}_j$,　($\bar{u} = 0$)

未知パラメータの数は、3・1式の k^2+k 個から、3・13式の $k+1$ 個に削減されたが、加法性条件3・4が付加されるから、独立なパラメータはk個である。3・13式に関して、$\bar{\alpha}$はk個の回帰方程式に共通しているから、A・ゼルナー（Zellner）の表示を用いるのが便利であり、この方程式体系は線型回帰モデルの最小二乗推定問題として処理される。しかもパラメータ$\bar{\alpha}$、b_iは一度に決定される。

$\bar{\alpha}$が与えられるとき、3・13式は下記のように表わされる。

(3.17)　$y_i' = b_i u + \varepsilon_i$,　($\varepsilon_i$：残差)

ただし、

(3.18)　$y_i' = y_i - \bar{\alpha} z_i$

3・17式は、y_i'を被説明変数、uを説明変数とする単純回帰問題であり、定数項がふくまれないケースである。3・11式によって表現されるa_{ij}は、3・4式が成立するとき、つねに3・3式を満足するから、3・13、3・17式の加法性条件は3・4式に還元される。b_iの最小二乗推定量が3・4式を満足することについては、すでに筆者等（一九七二）が明らかにした。したがって、レサー体系は加法性、同次性、対称性の三つの条件をすべて満足している。

平均代替弾力性$\bar{\alpha}$は、最小二乗法の原理から、次式によって求められる。

(3.19) $$\bar{\alpha}=\frac{\sum_i N_i}{\sum_i D_i}$$

上式の N_i, D_i は、

(3.20) $$N_i=\begin{vmatrix}\sum_t z_i^{(t)}y_i^{(t)} & \sum_t z_i^{(t)}u^{(t)} \\ \sum_t u^{(t)}y_i^{(t)} & \sum_t (u^{(t)})^2\end{vmatrix}$$

(3.21) $$D_i=\begin{vmatrix}\sum_t (z_i^{(t)})^2 & \sum_t z_i^{(t)}u^{(t)} \\ \sum_t u^{(t)}z_i^{(t)} & \sum_t (u^{(t)})^2\end{vmatrix}$$

2　効用関数の存在条件

レサーの線型支出体系3・3式を変形すると、次式が得られる。

(3.22) $$p_i(x_i-\bar{x}_i+\bar{\alpha}\bar{x}_i)=b_i\sum_j p_j\left(x_j-\bar{x}_j+\frac{\overline{W}_i}{b_i}\bar{\alpha}\,\bar{x}_j\right)$$

$b_i=\overline{W}_i$ の場合に限って、3・22式から、下記の直接的効用関数 (direct utility function) が導出される。

(3.23) $$U=\Pi_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x}_i+\bar{\alpha}\bar{x}_i)^{b_i},\ (b_i>0,\ \sum_i b_i=1,\ x_i-\bar{x}_i+\bar{\alpha}\bar{x}_i>0)$$

レサー効用関数の存在条件は、

(3.24) $$b_i=\overline{W}_i$$

この条件は、ゴーマン（W.M. Gorman）の定理〔文献(Pollak, 1971) 参照〕を用いることによって、いっそう厳密に証明される。

定理（Gorman）：需要関数が所得に関して線型であれば、間接的効用関数（indirect utility function）$\theta(P, E)$ はつぎのように表わされる。

$$G[\theta(P, E)] = \frac{E}{g(P)} - \frac{f(P)}{g(P)}, \qquad (G'>0; g(P), f(P)：一次同次)$$

このとき、需要関数はつぎの表現をとる。

$$(3.25)\quad x_i(P,E) = f_i - \frac{f \cdot g_i}{g} + \frac{g_i \cdot E}{g}, \qquad \left(f_i \equiv \frac{\partial f(P)}{\partial p_i},\ g_i \equiv \frac{\partial g(P)}{\partial p_i}\right)$$

3・13式から、

$$(3.26)\quad x_i = (1-\bar{\alpha})\bar{x}_i + \frac{(W_i\bar{\alpha} - b_i)}{P_i}\sum_j p_j \bar{x}_j + \frac{b_i E}{P_i}$$

3・25式と3・26式を比較すると、

$$(3.27)\quad \frac{g_i}{g} = \frac{b_i}{p_i}$$

したがって、微分方程式3・27の一つの解は[1]、

$$(3.28)\quad g(P) = \Pi_{i=1}^{k} p_i^{b_i}$$

また、3・25、3・26式の比較から、

$$(3.29)\quad f_i-\frac{b_i}{p_i}f=(1-\bar{\alpha})\bar{x}_i+\frac{(\overline{W}_i\bar{\alpha}-b_i)}{p_i}\sum_j p_j\bar{x}_j$$

上記の微分方程式体系を満たす $f(P)$ が存在するかどうかが問題になる。

３・29式を、$i=1$ について解けば、(2)

$$(3.30)\quad f(P)=\left(1-\frac{\overline{W}_1\bar{\alpha}}{b_1}\right)\sum p_j\overline{X}_i+\frac{\bar{\alpha}(\overline{W}_1-b_1)}{b_1(1-b_1)}p_1\overline{X}_1+p_1^{b_1}\cdot h(p_2,\cdots,p_k)$$

$i=2$ のときの３・29式を利用して、$h(p_2,\cdots,p_k)$ を定めると、(3)

$$(3.31)\quad h(p_2,\cdots,p_k)=\frac{\bar{\alpha}p_1^{-b_1}}{1-b_2}\left(\frac{\overline{W}_1}{b_1}-\frac{b_2\overline{W}_1}{b_1}+\overline{W}_2-1\right)p_2\overline{X}_2-\frac{\bar{\alpha}p_1^{-b_1}}{b_2}\left\{\left(\overline{W}_2-\frac{b_2\overline{W}_1}{b_1}\right)\sum_{j\neq 2}p_j\bar{x}_j\right.$$
$$\left.+\frac{b_2(\overline{W}_1-b_1)}{b_1(1-b_1)}p_1\bar{x}_1\right\}+p_2^{b_2}\cdot q(p_3,\cdots,p_k)$$

$h(p_2,\cdots,p_k)$ は p_1 を含むべきでない。そのためには、$b_i=\overline{W}_i$ でなければならない。このとき、３・29式の一般解は、

$$(3.32)\quad f(P)=(1-\bar{\alpha})\sum_i p_i\bar{x}_i+(\text{const.})\times\Pi_{i=1}^{k}p_i^{b_i}$$

３・28、３・32式を定理（Gorman）の中の式に代入すれば、間接的効用関数が得られる。それは直接的効用関数と双対関係にあるから、３・23式に変換することが可能である。しかしながら、(4) レサー効用関数の存在条件は、すべての所得弾力性が１という結果をもたらすので、需要体系に関する第四の公準を満足しない。

注(１)　$d(g)=\sum_i g_i dp_i$

3・27式を用いると、

$$\frac{d(g)}{g}=\sum_i \frac{b_i}{p_i}dp_i$$

両辺を積分して、

$$g(P)=C\cdot\Pi_{i=1}^{k}p_i{}^{b_i},\ (C：積分定数)$$

（2） $f_1-\dfrac{b_1}{p_1}f=(1-\bar{\alpha})\bar{x}_1+\dfrac{\overline{W}_1\bar{\alpha}-b_1}{p_i}\sum_i p_i\bar{x}_i$

表現をかえて、

$$f_1-\frac{b_1}{p_1}f-\left(c_0+\frac{c_1}{p_1}\right)=0$$

ここで、

$$c_0=(1-\bar{\alpha}+\overline{W}_1\bar{\alpha}-b_1)\bar{x}_1$$

$$c_1=(\overline{W}_1\bar{\alpha}-b_1)\sum_{i\neq 1}p_ix_i$$

上式に線型一階常微分方程式の一般解を適用すれば、3・30式が得られる。

（3） $i=2$ のとき、3・29式は、

$$f_2-\frac{b_2}{p_2}f=(1-\alpha)\bar{x}_2+\frac{W_2\bar{\alpha}-b_2}{p_2}\sum_i p_i\bar{x}_i$$

3・30式の f と、これを p_2 について微分して得られる f_2 を上式に代入して整理すると、

$$h_2(p_2,\cdots,p_k)-\frac{b_2}{p_2}h(p_2,\cdots,p_k)=C_0{}^*+\frac{C_1{}^*}{p_2},\ \left(h\equiv\frac{\partial h}{\partial p_2}\right),$$

ここで、 $C_0{}^*=\bar{\alpha}_1p_1{}^{-b_1}\left(\dfrac{\overline{W}_1}{b_1}-\dfrac{b_2\overline{W}_1}{b_1}+\overline{W}_2-1\right)\bar{x}_2$

$$C_1{}^*=\bar{\alpha}p_1{}^{-b_1}\left\{\left(\overline{W}_2-\frac{b_2\overline{W}_2}{b_1}\right)\sum_{i\neq 2}p_i\bar{x}_1+\frac{b_2(\overline{W}_1-b_1)}{b_1(1-b_1)}p_1\bar{x}_1\right\}$$

上記の微分方程を解くと、

$$h(p_2,\cdots,p_k)=\frac{C_0^*}{1-b_2}p_2-\frac{C_1^*}{b_2}+p_2^{b_2}\cdot q\,(p_3,\cdots,p_k)$$

これは3・31式にほかならない。

（4） 効用関数の双対性および変換問題については、文献（Lau・1970）参照。

(二) パウエル体系

1 理論構成

パウエル体系の基本的仮定は「選好の直接的加法性」である。この仮定のもとでは、H・S・ハウタッカー（Houthakker: 1960）の定理から、相異なる二財の間の代替効果は二財の需要の所得に関する偏導関数（income derivatives）に比例し、所得の限界効用の所得弾力性（money flexibility）に逆比例する。

(3.33) $K_{ij}=K_{ji}=\lambda\frac{\partial x_i}{\partial E}\frac{\partial x_j}{\partial E},\ (i\neq j)$, （ハウタッカーの条件）

K_{ij}は代替効果である。λは比例乗数であるが、つぎの関係をもっている。

(3.34) $\lambda=\frac{-\omega}{\partial\omega/\partial E}=\frac{-E}{\check{\omega}}$

ωは所得の限界効用、$\check{\omega}$は所得の限界効用の所得弾力性である。代替効果の対称性は代替弾力性の対称性として表現され、諸変数の平均水準で下記のように表わされる。

(3.35) $\bar{\alpha}_{ij}=\bar{\alpha}_{ji}=\frac{\bar{\lambda}b_ib_i}{\overline{W}_i\overline{W}_j\bar{E}},\ (i\neq j)$, （対称関係）

(3.7)′　3・35式を3・9式に応用すると、

$$(3.36)\quad a_{ij}=(b_i-\delta_{ij})\left(\frac{\bar{\lambda}b_j}{\bar{p}_j}-\bar{x}_j\right)$$

k^2個のパラメータa_{ij}は、レサー体系のばあいと同じく、k^2-k 個の対称関係とk個の同次条件を付加することによって、b_iと新しくパラメータ$\bar{\lambda}$の合計 $k+1$ 個のパラメータからなる関数として与えられる。価格弾力性$\bar{e}_{ij}$は、3・36式を3・6式に代入すると、3・37式のとおりになる。さらに3・34式を用いると、3・37式はR・フリッシュ (Frisch: 1959) の公式と符合する。

$$(3.37)\quad \bar{e}_{ij}=-\frac{b_i}{\bar{p}_i\bar{x}_i}\{\bar{p}_j\bar{x}_j+\bar{\lambda}(\delta_{ij}-b_j)\}$$

$$(3.37)'\quad \bar{e}_{ij}=-E_i\left(\overline{W}_j-\frac{\delta_{ij}-\overline{W}_jE_j}{\check{\omega}}\right),\qquad \text{(フリッシュの公式)}$$

所得弾力性$\overline{E}_i$、価格係数a_{ij}、価格弾力性$\bar{e}_{ij}$はおのおの3・5、3・36、3・37式によって得られる。

未知パラメータの推定問題に関しては、もとの線型支出体系3・1に3・36式を代入して、3・38式のような推定式が導かれる。

$$(3.38)\quad y_i=\lambda r_i+b_iu$$

ここで、y_i、r_i、uの定義は、

$$(3.39)\quad y_i=p_ix_i-p_j\bar{x}_i,\qquad (\bar{y}_i=0)$$

$$(3.40)\quad r_i=b_i\left\{\sum_j b_j\left(\frac{p_j}{\bar{p}_j}\right)-\left(\frac{p_i}{\bar{p}_i}\right)\right\},\quad (\bar{r}_i=0)$$

$$(3.41)\quad u=E-\sum_j p_j\bar{x}_j,\qquad (\bar{u}=0)$$

未知パラメータの数は、レサーの場合と同様、k^2+k 個から $k+1$ 個に削減された。$\bar{\lambda}$は、さきの平均代替弾力性$\bar{\alpha}$と同様、k個の回帰方程式に共通している。3・38式は、レサー体系の3・13と表現形式が同じであるからr_iを既知とすれば、パラメータ$\bar{\lambda}$、b_iは最小二乗推定問題として決定される。$\bar{\lambda}$が与えられるとき、3・38式はつぎのようにかきかえられる。

$$(3.42)\quad y_i'=b_iu+\varepsilon_i,\quad (\varepsilon_i：残差)$$

ここで、

$$(3.43)\quad y_i'=y_i-\bar{\lambda}r_i$$

3・42式は、定数項を含まない単純回帰問題として取り扱われる。これは3・38式と変わりないから、これらの加法性条件は3・4式によって代表される。3・36式のa_{ij}は、3・4式が成立するとき、つねに3・3式を満たす。b_iの最小二乗推定量は3・4式を満足する。$\bar{\lambda}$の算式はつぎのとおりである。

$$(3.44)\quad \bar{\lambda}=\frac{\sum_i N_i}{\sum_i D_i}$$

ただし、

$$(3.45)\quad N_i=\begin{vmatrix}\sum_t r_i^{(t)}y_i^{(t)} & \sum_t r_i^{(t)}u^{(t)}\\ \sum_t u^{(t)}y_i^{(t)} & \sum_t (u^{(t)})^2\end{vmatrix}$$

(3.46)　$D_i=\begin{vmatrix} \sum_t (r_i^{(t)})^2 & \sum_t r_i^{(t)}u^{(t)} \\ \sum_t u^{(t)}r_i^{(t)} & \sum_t (u^{(t)})^2 \end{vmatrix}$

3・38式の線型支出体系は、パラメータに関して非線型であるから、パラメータの推定については、最小二乗法による逐次的接近を行なって収束させる。3・40式の $r_i^{(t)}$ は既知ではないから、それらの構成要因 b_i の初期値を外部から与える必要がある。それには、レサーの b_i を用いることが可能である。レサーの b_1 を初期値とした場合の $r_i^{(t)}$ とそれをもとにして得られる $\bar{\lambda}$ から、パウエル体系のラウンド1の b_i が算出される。その b_i はさらに新しい $\bar{\lambda}$、b_i の値を与えるから、$\bar{\lambda}$、b_i の推定値が収束するまで、同じ推定手続きを反復実行する。しかしながら、この接近法には、推定値が偏りをもち、収束の保証がないという欠点がある。

2　効用関数の導出

パウエルの需要体系は3・38式によって表わされるが、これに対応する効用関数は3・38式を下記のように変形することによって導かれる。

(3.47)　$p_i\left(x_i-\bar{x}_i+\frac{b_i\lambda}{\bar{p}_i}\right)=b_i\left\{\sum_j p_j\left(x_j-\bar{x}_j+\frac{b_j\bar{\lambda}}{\bar{p}_j}\right)\right\}$

さきの推論から、下記の効用関数がただちに得られる。

(3.48)　$U=\Pi_{i=1}^{i}\left(x_i-\bar{x}_i+\frac{b_i\bar{\lambda}}{\bar{p}_i}\right)^{b_i},\ \left(b_i>0,\ \sum_i b_i=1,\ x_i-\bar{x}_i+\frac{b_i\bar{\lambda}}{\bar{p}_i}>0\right)$

パウエル体系の効用関数3・48とストーン・ギアリー効用関数2・16を照らし合わせてみると、ストーン・ギア

リーのパラメータβ_iは、パウエル体系ではパラメータ$\bar{\lambda}$、b_iに依存して定まる。

(3.49) $\beta_i=\bar{x}_i-\dfrac{b_i\bar{\lambda}}{p_i}$

これよりつぎのことが明らかである。パウエル体系は、各変数の平均値における local な議論を行ない、選好の直接的加法性を仮定した。その結果、ストーン体系のパラメータβ_iを他の $k+1$ 個のパラメータで説明し、未知パラメータの数を$2k+1$個から$k+1$個まで削減した。したがって、3・49式をストーンの需要体系(2.2)'に代入することによって、パウエルの需要体3系・50が得られる。

(3.50) $x_i=\bar{x}_i+\dfrac{\bar{\lambda}b_i}{p_i}\left\{\sum_j b_i\left(\dfrac{p_j}{\bar{p}_j}\right)-\left(\dfrac{p_i}{\bar{p}_i}\right)\right\}+\dfrac{b_i}{p_i}\left(E-\sum_j p_j\bar{x}_j\right)$

ストーン体系は global な範囲で構成されているのに対して、パウエル体系は平均値の近傍という local な範囲の議論である。いいかえれば、パウエル体系は諸変数の平均水準におけるストーン体系の近似であり、パウエルの需要体系および効用関数はストーンの需要体系および効用関数と同じクラスに属する。

需要体系の分析には、線型支出体系のほかにも二、三の適用可能な体系がある。しかしながらそれらは、あてはまりの程度、推定手続きの難易、パラメータの恒常性などの視点からみて必ずしも上記の諸体系をしのぐものとはいえない。K・吉原(Yoshihara: 1969)は代表的な需要体系を四つあげ、理論的公準によるテストおよび経験的適合性のテストを行なった。その中で、ストーンの線型支出体系とH・S・ハウタッカー(Houthakker: 1960)の間接的アディログ体系(Indirect addilog system)の二つは理論的テストをパスし、経験的テストではストーン体系が間接的アディログ体系よりもはるかにすぐれていることを説き、わが国の消費需要分析に対してストーン体系の有効

性を強調している。

しかしながら、わが国の食料需要分析にストーン体系をそのまま適用することは困難である。この問題に関しては後段で説明する。

四　実　証　分　析

(一)　レサー、パウエル両体系の問題点

前述の小論（一九七二）で、食料を中心とした一〇品目の需要体系に関して分析を行なった。分析結果の適合性テストでは、需要予測の精度が非常に高く、適合度は内挿テストで八九％以上、外挿テストで八六％以上であった。したがって需要予測の観点からみれば、両体系による中分類費目の食料需要体系の分析は実際に効果的なものであった。

しかしながら、二つの分析結果から、レサー、パウエル両体系の適用上の問題点が明らかにされる。両体系の弾力性には多くの類似性がみられたが、両者の間にはなお多少の明確な相違点が指摘される。それはパラメータの恒常性とも関連する問題であるが、両体系の基本的仮定の差異に由来しているようにおもわれる。たとえば、レサー体系では、所得弾力性は経験的に妥当な値を示しており、パウエル体系の所得弾力性と近似しているものが多い。他方、直接価格弾力性はどれも平均代替弾力性の値に接近しており、必ずしも妥当な推定値とはいえない。これは、価格弾力性の算式3・12の構造からくる問題であり、財の分類を細分化するにつれて顕著に現われてくる。大分類費目の場合には、この問題はあまり重大ではない。

パウエル体系では、レサー体系とは異なり、価格弾力性が特定の値に偏る傾向はほとんどない。所得弾力性に関しては、パラメータb_iの一部が不安定になるため、有意な推定値が得られないという問題が生じる。これは、選好の直接的加法性という仮定が財の分類を細分化するにつれてしだいに妥当しなくなるためであろう。直接的加法性の仮定は、大分類費目のような場合には妥当しても、細分化された財については適用が困難になる可能性が強いであろう。

パウエル体系に関するいま一つの問題は、推定手続きがそれほど単純化されていないことである。パウエル体系は、選好の直接的加法性を仮定して、諸変数の平均値で線型支出体系の近似を行なって、未知パラメータの個数を少なくしている。しかしながら、3・38式によって表示されるパウエル体系はパラメータに関して非線型であるから、前述のように最小二条法を反覆使用するという逐次的手続きを通じてパラメータを収束させる必要がある。したがって、パラメータの数は、ストーン体系の$2k$個から$k+1$個に削減されたが、推定方法はそれほど単純化されていない。

さらに、効用関数を基礎にしてパウエル体系を議論する場合には、ストーン体系の場合と同様、下級財および補完財を考慮に入れることができない。すなわち、パウエル体系の効用関数はストーン・ギアリー効用関数と同じクラスに属するから、均衡の二階の条件を満足するためには、効用関数の構造上の性質から、下級財および補完財を除外しなければならない。本論の実証分析では、食料需要体系の統計的分析に主眼をおいているので、この問題についてはこれ以上立ち入らない。ストーンによる線型支出体系を直接適用しなかったのもこのような理由によるのである。

(二)　パウエル近似体系とその適用

食料需要分析を意義深いものにするためには、多品目を対象として、可能な範囲で財の分類を細分化する必要がある。その場合、レサーおよびパウエル体系に関して、基本的仮定の経験的妥当性が当然問題になる。中分類程度の費目を対象として、さきにあげた両体系の問題点を解決する一つの方法は、両者の長所を生かした新しい体系を構成することである。すなわち、所得弾力性はレサー体系のものに近接させ、価格弾力性は「直接的加法性」のもとで決定し、さらに推定方法を簡単化することである。これは、パウエル体系3・38式の推定手続きを単純化することによって可能である。3・40式で定義されたr_iの構成要素b_iに関して、経験的に妥当な値が得られるとき、それを代入することによってr_iは外生変数として扱われ、推定は非常に容易になる。この方法は、一部の変数を外生化してパウエル体系を近似するので、ここでは「パウエル近似体系」とよぶことにしよう。

つぎに実際の分析にうつる。資料と財の分類の仕方は、前述の小論(一九七二)と同じである。価格および支出資料は、総理府統計局『家計調査年報』(全都市全世帯)の一九五八―六八年のもので、価格資料は一九六五年を1として、消費者物価指数で除して実質表示されている。支出資料も同様に実質表示であり、一人当たり年間一ヵ月平均円単位で表わされている。財の分類は食料を主体とした一〇個の中分類費目である。

一、米
二、その他穀類
三、魚介
四、肉

五、乳卵
六、野菜
七、果物
八、外食
九、その他食料
一〇、非食料

パウエル近似体系の推定にあたって、レサーのb_iを利用すると、得られる推定値$\bar{\lambda}$、$\hat{b}_i$は第一表に記された収束過程のラウンド1の推定値に外ならない。ラウンド1の$\hat{b}_i$の符号はすべてラウンド0（レサー体系）の場合と一致しており、所得弾力性の推定はラウンド15（パウエル体系）と比較して多少改善されるようにおもわれる。収束過程での$\hat{b}_3$、$\hat{b}_6$は符号が変化し、不安定な性格をもつことが明らかである。

ラウンド1で得られたパウエル近似体系の$\bar{\lambda}$、$\hat{b}_i$と$\bar{p}_i$、$\bar{x}_i$を3・36式に代入すると、価格係数a_{ij}が求まる。パウエル近似体系の価格、所得係数は第二表の通りである。価格係数および所得係数の列和は、3・3、3・4式の制約条件を満たしている。各支出関数の重相関係数は、パウエル体系と比べてほとんど変わらない。3・5、3・37式にしたがって所得および価格弾力性を求めると、第三表のようになる。第三表では、エンゲル集計、クールノー集計、同次条件3・7が満たされており、これらの条件から逆に全食料関係の弾力性が算出される。財三、六の所得弾力性は、パウエル体系とは異なり、正の値である。パウエル体系のb_3、b_6の推定値が大きな偏りをもつであろうことは、収束過程における残差平方和の推移をみれば明らかである。それは付表一に記されたとおりである。

第1表　パウエル体系の収束過程

ラウンド	$\bar{\lambda}$	$\check{\omega}$	所得係数 $\hat{b}_i$									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0			−45,534	6,325	16,583	48,834	42,980	14,884	26,732	34,238	90,180	764,778
1	5,520.4	−203,891	−42,837	6,823	4,132	50,921	42,335	4,485	27,366	34,661	96,381	775,733
2	5,770.3	−195,061	−43,303	6,887	−1,112	52,344	42,469	−200	27,892	35,293	96,539	783,191
3	5,578.7	−201,760	−43,483	6,916	−3,520	52,494	42,968	−2,522	27,952	35,394	97,174	786,627
4	5,480.6	−205,373	−43,581	6,932	−4,584	52,448	43,129	−3,629	27,957	35,396	97,473	788,489
5	5,426.5	−207,420	−43,598	6,935	−5,039	52,350	43,836	−4,141	27,931	35,326	97,559	788,841
6	5,409.3	−208,081	−43,652	6,944	−5,239	52,359	43,134	−4,382	27,950	35,349	97,697	789,840
7	5,406.9	−208,173	−43,654	6,944	−5,324	52,359	43,300	−4,496	27,952	35,351	97,695	789,873
8	5,383.9	−209,061	−43,658	6,944	−5,355	52,317	43,310	−4,541	27,939	35,334	97,735	789,975
9	5,382.3	−209,123	−43,660	6,944	−5,368	52,308	43,313	−4,562	27,938	35,332	97,738	790,017
10	5,383.6	−209,074	−43,660	6,944	−5,347	52,308	43,309	−4,573	27,939	35,333	97,736	790,011
11	5,380.9	−209,179	−43,661	6,945	−5,364	52,304	43,316	−4,577	27,938	35,331	97,741	790,027
12	5,383.4	−209,082	−43,662	6,945	−5,373	52,309	43,311	−4,580	27,939	35,334	97,739	790,038
13	5,382.8	−209,105	−43,662	6,945	−5,377	52,309	43,313	−4,581	27,939	35,334	97,740	790,040
14	5,382.7	−209,106	−43,662	6,945	−5,378	52,309	43,313	−4,581	27,939	35,334	97,740	790,041
15	5,382.7	−209,106	−43,662	6,945	−5,378	52,309	43,313	−4,581	27,939	35,334	97,740	790,041

注．$\check{\omega}$ は 10^5 を乗じ，$\hat{b}_i$ は 10^6 を乗じて表わした．ラウンド 0，1，15 の推定値はそれぞれレサー体系，パウエル近似体系，パウエル体系のパラメータである．

第2表　パウエル近似体系の価格および所得係数と重相関係数

i 財 ＼ j	$\hat{a}_{ij}$ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\hat{b}_i$	R
1 米	1,128.573	7.297	19.441	4.098	4.435	16.326	3.106	5.539	31.015	109.490	−42,837	0.981
2 その他穀類	−7.384	169.184	−3.097	−0.653	−0.706	−2.600	−0.495	−0.882	−4.940	−17.439	6,823	0.729
3 魚介	−4.472	−0.704	451.964	−0.395	−0.428	−1.575	−0.300	−0.534	−2.992	−10.561	*4,132	0.977
4 肉	−55.107	−8.674	−23.110	90.798	−5.272	−19.407	−3.692	−6.584	−36.868	−130.152	50,931	0.997
5 乳卵	−45.816	−7.212	−19.213	−4.050	99.150	−16.135	−3.070	−5.474	−30.651	−108.207	42,335	0.984
6 野菜	−4.854	−0.764	−2.035	−0.429	−0.464	379.409	−0.325	−0.580	−3.247	−11.463	*4,485	0.969
7 果物	−29.616	−4.662	−12.420	−2.618	−2.833	−10.430	70.522	−3.538	−19.813	−69.946	27,366	0.979
8 外食	−37.511	−5.904	−15.731	−3.316	−3.589	−13.210	−2.513	124.819	−25.095	−88.592	34,661	0.993
9 その他食料	−104.305	−16.418	−43.741	−9.221	−9.979	−36.733	−6.988	−12.462	654.236	−246.346	96,381	0.992
10 非食料	−839.509	−132.143	−352.058	−74.214	−80.314	−295.646	−56.246	−100.303	−561.645	573.218	775,733	0.999
Σ	−0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	−0.001	−0.001	0.001	0.000	0.002	100,000,000	

注. R は $p_i x_i$ と $p_i \hat{x}_i$ の間の単純相関係数. b_i は 10^6 を乗じて表示. ＊ $\hat{b}_i$, $r_{y'u}$ は財3, 6については有意水準5％で有意性なし. 他は1％で有意.

第3表　パウエル近似体系の弾力性マトリックス

i ＼ j	1	2	3	4	5	6
1 米	0.334	0.009	0.020	0.005	0.006	0.016
2 その他穀類	−0.036	−0.187	−0.013	−0.003	−0.004	−0.011
3 魚介	−0.010	−0.002	−0.057	−0.001	−0.001	−0.003
4 肉	−0.147	−0.023	−0.055	−0.761	−0.015	−0.044
5 乳卵	−0.132	−0.021	−0.049	−0.012	−0.688	−0.040
6 野菜	−0.014	−0.002	−0.005	−0.001	−0.001	−0.075
7 果物	−0.133	−0.021	−0.050	−0.012	−0.014	−0.040
8 外食	−0.119	−0.019	−0.044	−0.010	−0.012	−0.036
9 その他食料	−0.082	−0.013	−0.031	−0.007	−0.009	−0.025
全食料	−0.001	−0.017	−0.026	−0.069	−0.059	−0.022
10 非食料	−0.122	−0.019	−0.045	−0.011	−0.013	−0.037
$\sum_i \overline{W}_i \bar{e}_{ij}$	−0.07524	−0.01850	−0.03791	−0.03339	−0.03078	−0.03101
$\overline{W}_j$	0.07524	0.01850	0.03791	0.03339	0.03078	0.03101

i ＼ j	7	8	9	全食料	10	Σ	E_i
1 米	0.004	0.006	0.038	0.437	0.132	0.569	−0.569
2 その他穀類	−0.002	−0.004	−0.024	−0.283	−0.085	−0.369	0.369
3 魚介	−0.001	−0.001	−0.007	−0.084	−0.025	−0.109	0.109
4 肉	−0.010	−0.017	−0.101	−1.172	−0.353	−1.525	1.525
5 乳卵	−0.009	−0.015	−0.091	−1.057	−0.319	−1.375	1.375
6 野菜	−0.001	−0.002	−0.010	−0.111	−0.034	−0.145	0.145
7 果物	−0.688	−0.015	−0.091	−1.065	−0.321	−1.386	1.386
8 外食	−0.008	−0.618	−0.081	−0.947	−0.285	−1.232	1.232
9 その他食料	−0.005	−0.009	−0.474	−0.654	−0.197	−0.851	0.851
全食料	−0.038	−0.050	−0.160	−0.444	−0.134	−0.578	0.578
10 非食料	−0.008	−0.014	−0.084	−0.352	−0.915	−1.267	1.267
$\sum_i \overline{W}_i \bar{e}_{ij}$	−0.01975	−0.02813	−0.11320	−0.38791	−0.61209	−1.000	
$\overline{W}_i$	0.01975	0.02813	0.11320	0.38791	0.61209	1.000	

注. エンゲル集計：$\sum \overline{W}_i E_i = 1$ は条件（3.4）と等値である.

クールノー集計：$\sum \overline{W}_i \bar{e}_{ij} = -\overline{W}_j$

残差平方和はラウンドを重ねるにつれて体系全体として増加し、ある一定の大きさのところで収束する。財三、六の残差平方和はいちじるしい増加を示している。

パウエル近似体系の対称関係は第四表に記されたようになる。全食料を除けば、対称関係の符号は3・35で定義されたように、上級財の間では正、上級財と下級財の間では負になり、前者は代替関係、後者は補完関係にあるといわれる。米の対角項α_{11}は正となり、均衡の二階の条件を満足しない。それは、米がパウエル近似体系において下級財の性格をもつからである。

第4表　対　称　関　係　$\bar{\alpha}_{ij}=\bar{\alpha}_{ji}$

i ＼ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	全食料	10
1 米	3.870										
2 その他穀類	−0.103	−9.713									
3 魚介	−0.030	0.020	−1.404								
4 肉	−0.426	0.276	0.081	−21.261							
5 乳卵	−0.384	0.249	0.073	1.029	−20.988						
6 野菜	−0.040	0.026	0.008	0.108	0.098	−2.277					
7 果物	−0.387	0.251	0.074	1.037	0.935	0.098	−33.471				
8 外食	−0.344	0.223	0.066	0.922	0.831	0.088	0.838	−20.738			
9 その他食料	−0.238	0.154	0.046	0.637	0.574	0.060	0.578	0.514	−3.333		
全食料	0.558	−0.362	−0.107	−1.496	−1.349	−0.142	−1.359	−1.209	−0.835	−0.567	
10 非食料	−0.354	0.229	0.068	0.948	0.855	0.090	0.861	0.766	0.529	0.359	−0.228

注. $\bar{\alpha}_{ij}=\overline{E}_i+\bar{e}_{ij}/\overline{W}_i$

(三) 分析結果の適合性テスト

需要量の実際値x_iに対する推定値$\hat{x}_i$の比率を計算すると、各財、各年次について第五表のような結果が得られる。内挿テスト（一九五八〜六八）の適合度は、ほとんど一±〇・一〇の範囲内にある。この範囲をこえるのはわずか二つで、一つは他の二体系と同じく一九六二年の財七であり、一を〇・一一上回る。いま一つは一九五八年の財六で、一を〇・一二下回る。したがって的中率は八八％以上であり、レサー、パウエル両体系と比較してもわずかに一％

第5表　内挿および外挿テストの適合度　$\frac{\hat{x}_{it}}{x_{it}}$

年次 ＼ i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1958	1.037	0.972	0.957	0.993	1.044	0.877	0.942	0.991	1.015	1.001
1959	1.013	1.011	0.932	1.001	1.034	0.931	0.963	0.993	1.024	1.000
1960	0.978	1.072	0.954	1.023	1.021	0.945	0.997	0.988	1.007	1.005
1961	0.976	1.042	0.977	1.042	0.993	0.989	1.022	0.985	0.990	1.005
1962	0.971	1.013	1.002	1.013	0.994	1.046	1.109	1.007	0.983	1.000
1963	0.988	0.989	1.062	1.001	0.988	1.073	1.088	1.006	0.981	0.995
1964	0.979	0.924	1.011	0.985	0.962	1.031	0.966	1.032	0.997	1.006
1965	1.010	0.936	1.063	0.969	0.952	1.079	0.970	1.029	0.988	0.999
1966	1.033	0.968	1.002	0.976	0.974	0.983	0.972	1.028	0.997	1.001
1967	1.003	1.016	1.006	0.991	1.006	1.020	0.961	0.989	1.001	1.000
1968	1.016	1.082	1.009	1.023	1.059	0.971	1.016	0.956	1.023	0.991
1969	1.022	1.080	1.033	1.042	1.126	0.965	1.019	0.925	1.039	0.986

第6表　支出比率の推定値 $\hat{W}_{it}$ の年次別および平均情報不正確度

$$I_t=\sum_i W_{it}\log\frac{W_{it}}{\hat{W}_{it}}$$

体系＼年次	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	平均 $\bar{I}$
レサー体系	129	110	93	62	238	240	172	109	91	49	265	142
パウエル体系	269	114	90	60	249	292	127	278	120	20	288	173
素朴モデル	—	8,572	719	1,474	1,218	260	707	133	418	375	1,354	1,523
パウエル近似体系	461	249	196	97	191	260	152	292	85	21	216	202

注．単位：10^{-6}nat.　　素朴モデル：$\hat{W}_{it}=W_{i,t-1}$

第7表　支出比率の推定値 $\hat{W}_{it}$ の品目別情報不正確度

$$\bar{I}_i=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}I_{it}$$

体系＼i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
レサー体系	13	21	14	2	12	1	24	11	31	21
パウエル体系	29	25	30	2	13	54	33	10	18	11
素朴モデル	404	34	10	23	117	48	25	19	796	195
パウエル近似体系	23	21	30	5	19	62	25	9	15	12

注．$I_{it}=W_{it}\log\frac{W_{it}}{\hat{W}_{it}}+(1-W_{it})\log\frac{1-W_{it}}{1-\hat{W}_{it}}$，単位：$10^{-6}$nat.

下回っているにすぎない。外挿テストでは、財五の適合度だけが一±〇・一〇をこえ、一・一三である。的中率は八七％で、パウエル体系と同じである。適合度の比較では、パウエル近似体系は他の二体系とほとんど変わりないことが分かる。

つぎに、H・タイル（Theil: 1965, 1966）の情報不正確度（Information inaccuracy）を計算し、レサー、パウエル両体系および素朴モデルとの比較を行なう。計算結果は第六、第七表に記載されている。第六表から、パウエル近似体系の情報不正確度は二〇二（10^{-6}nat.）であり、他の二体系よりもやや大きな値を示しているが、あまり差はない。第七表に記されている品目別情報不正確度では、パウエル近似体系は財二（その他穀類）、八（外食）、九（その他食料）に関

して最低の値を示し、その他の財に関しても比較的小さい。
以上のように、需要予測という観点からみても、パウエル近似体系はレサー、パウエル両体系に対してそん色はないといえよう。

(四) 食料需要パターン

第三表の弾力性マトリックスでは、米を除くすべての所得弾力性が正の値であり、レサーの場合と類似している。直接価格弾力性はパウエルの弾力性に近似している。これらの結果から、レサー、パウエル両体系を折衷するという所期の目的は一応達成されたわけである。既述の三つの体系を比較すると、肉、乳卵、果物、外食、その他食料および非食料の価格、所得弾力性は、符号についてはもちろん、絶対値に関してもかなり近接した値を示している。米とその他穀類の価格、所得弾力性については、パウエル体系とパウエル近似体系の値が非常に近接している。魚介と野菜に関しては、「選好の直接的加法性」を仮定した場合、パウエル体系よりもパウエル近似体系の方が経験的に妥当な数値に近いと考えられるが、弾力性の絶対値が予想よりもいくぶん下回っている。全食料の弾力性は、パウエル体系とパウエル近似体系との間に類似性があり、これらとレサー体系を比較しても、直接弾力性と二つの交叉弾力性がくいちがう程度で、他は近似している。三つの体系のうちで、パウエル近似体系の弾力性マトリックスが経験的妥当性をもっている。

パウエル近似体系と他の二体系の間の類似性に関してややくわしく説明しよう。括弧の数値はレサー、パウエル両体系の弾力性である。所得弾力性は、米が㈠〇・五七（㈠〇・五八～㈠〇・六〇）、その他穀類が〇・三七（〇・三四

～〇・三八)、肉が一・五三（一・四六～一・五七)、乳卵が一・三八（一・四〇～一・四一)、果物が一・三九（一・三五～一・四二)、外食が一・二三（一・二二～一・二六)、その他食料が〇・八五（〇・八〇～〇・八六)、全食料が〇・五八（〇・五四～〇・六一)、非食料が一・二七（一・二五～一・二九）である。

価格弾力性に関しては部分的に種々の相違がみられるが、直接弾力性は、肉が㈠〇・七六（㈠〇・六四～㈠〇・七六)、乳卵が㈠〇・六九（㈠〇・六三～㈠〇・六九)、果物が㈠〇・六九（㈠〇・六二～㈠〇・六九)、外食が㈠〇・六二（㈠〇・六二～㈠〇・六三）で、各財それぞれ近接した値をとっている。

全食料の所得弾力性は〇・五八（〇・五四～〇・六一)、直接価格弾力性は㈠〇・四四（㈠〇・四一～㈠〇・六一）で、所得および食料価格による影響はかなりよく現われているが、非食料価格に関する交叉弾力性は㈠〇・一三（㈠〇・一三～㈠〇・〇〇）であるからその影響は小さい。個々の財については、所得および当該価格の効果は弾力性の絶対値からみて大きく現われているが、他財の価格効果は総じて小さい。しかしながら、そのことが必ずしも「選好の直接的加法性」の仮定による影響でないことは、レサー体系の結果からしても明らかである。

穀類、畜産物、野菜・果物の三グループの間の関係を若干考察すると、肉、乳卵の交叉弾力性は、米、その他穀類、野菜、果物の価格に関してそれぞれ㈠〇・一三～㈠〇・一五（㈠〇・〇六～㈠〇・一五)、㈠〇・〇二（㈠〇・〇二)、㈠〇・〇四（㈠〇・〇二～㈠〇・〇五)、㈠〇・〇一（㈠〇・〇一～㈠〇・〇二）である。米の交叉弾力性はその他穀類価格については〇・〇一（〇・〇一～〇・〇二)、肉、乳卵価格については〇・〇一（〇・〇一～〇・〇四)、野菜、果物価格については〇・〇〇～〇・〇二（〇・〇〇～〇・〇四）である。野菜の交叉弾力性は全体的にきわめて小さく、果物の交叉弾力性は米、その他穀類の価格に関しては㈠〇・一三（㈠〇・〇六～㈠〇・一四)、㈠〇・〇二（㈠〇・

〇一～㈠〇・〇二）、肉、乳卵価格に関しては㈠〇・〇一（㈠〇・〇一～㈠〇・〇三）である。なお、米、その他穀類、野菜さらに魚介の直接弾力性については、今後検討の必要がある。

総支出に占める各財の支出比率の推移は、付表二に記されている。支出比率は、米が顕著に低下し、その他穀類、魚介およびその他食料も明らかに減少傾向にある。肉、果物、外食および非食料は増大している。野菜と乳卵については、はっきりした傾向的変化がみられないが、どちらかといえば、前者は減少、後者は増加傾向にあるといえよう。これらの現象は、パウエル近似体系の個々の所得弾力性がある程度反映しているように考えられる。

食料内部の品目別支出構成比は付表三のとおりである。米の支出構成比はいちじるしく低下しており、その他穀類もわずかながら減少している。肉、乳卵、果物、外食は明らかな増加傾向を示し、魚介、野菜、その他食料もわずかながら増加傾向にある。野菜、魚介、肉の価格水準はかなり上昇しており、外食、果物も上昇傾向を示している。乳卵は、価格水準が下降している数少ない品目の一つであり、その他食料および非食料の価格水準もいくぶん下落している。

(五)　基礎消費量の推定

需要体系の計測がいわゆる統計的需要分析の枠内にとどまらず、効用関数にその基礎を求める大きな意義は、たんに論理的整合性をつらぬくというだけではない。むしろ、生計費指数や財の代替、補完関係、所得の限界効用の弾力性、基礎消費量あるいは飽和水準などが効用関数を通じて適確に把握されるという点が重要であろう。それらは経済厚生や選好の構造に関連する有用な情報である。

第8表　基礎消費量 β_i の推定値

数量 ＼ i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{\beta}_i$	1,082.2*	170.3	453.8	95.7	103.5	381.1	72.5	129.3	724.0	2,556.0
$\bar{x}_i$	846.0	208.0	479.5	379.6	318.1	410.2	226.4	326.8	1,243.1	6,754.4

注．＊印は基礎消費量に該当せず．$\bar{x}_i$：i 財の消費量の全期間平均値．財3，財6に関しては，β_i が多少過大推定されているため，x_i の実際値の最小のものが β_i をわずかながら下回る．

パウエル近似体系による上述の分析は、統計的需要分析を内容とするものである。これをいったん効用関数を基礎にした議論に引きもどすと、パウエルあるいはパウエル近似体系の効用関数から、個々の財の基礎消費量を推定することが可能である。ストーン、パウエル両体系の共通性から、3・49式が成立しており、選好の構造を特徴づけるパラメータ β_i は基礎的必要消費量であるから、ここでは β_i を簡単に「基礎消費量」とよぶ。3・49式の各変数、パラメータにそれぞれの実際値を代入すると、β_i の値は第八表のとおりである。

財一の米は下級財であるから、β_i に基礎消費量としての意味づけはできない。他の九財に対してはいちおう基礎消費量が算出され、それぞれの消費量の全期間平均値と対比されている。財三の魚介と財六の野菜に関しては、パラメータ b_i がやや過小推定されたため、基礎消費量 β_i は過大に推定されている。

五　結び

本論では、線型支出体系の系譜をたどりながら、ストーン、レサー、パウエルの三つの体系の理論的検討を行ない、食料需要分析に対する有効性と限界について吟味した。また、レサー、パウエル両体系の実証面での問題点を指摘し、それを解決する一つの方法として「パウエル近似体系」を提示し、実証分析を行なった。分析

内容は、食料を主体とした一〇個の中分類費目の需要体系を計測し、レサー、パウエル両体系の計測例との比較を行なったことである。また本論の計測結果は、十分といえないまでも、他の体系の欠陥を補う内容をもっており、経験的にみてもレサー、パウエルの二体系よりも妥当性がある。

本分析で明確になった諸点を理論面と実証面に分けて、箇条書きに整理しよう。

〔理論面〕

一、ストーン体系は効用関数を基礎にした global な範囲での体系であるが、効用関数の構造上下級財や補完財を含まないから、財の分類をかなり細分化した食料の需要分析には適しない。

二、レサー体系は一般的性質をそなえた効用関数と対応しないため、統計的需要分析の範ちゅうに属する需要体系である。また、それは各変数の平均値の点で線型化された支出体系である。

三、パウエル体系は、レサー体系の延長線上の展開である。それはまた、「平均値」の点で近似された支出体系という意味で統計的需要分析の事例として分類することができよう。他方、「選好の直接的加法性」を仮定しているので、「平均値」の点でストーン体系を近似していることにもなる。したがって「平均値」の点で効用関数が成立する。

四、効用関数の基礎の上に立って食料需要体系を確立するためには、効用関数が上級財と下級財の双方を含み、かつ財の分類がある程度細分化されうるものでなければならない。

〔実証面〕

一、パウエル近似体系の計測結果は、レサー、パウエル両体系を折衷した体系に相応しい結果となって現われて

いる。所得弾力性はレサーの場合に近似し、直接価格弾力性はパウエルの方に近接している。三つの体系の中では、パウエル近似体系の弾力性マトリックスが全体として妥当性をもっている。

二、適合性のテストでは、三つの体系の間でほとんど優劣がない。的中率は、内挿テストで八八％以上、外挿テストで八六％以上とそれぞれ高い。

三、肉、乳卵、果物、外食、その他食料および非食料など、いわゆる成長品目の価格および所得弾力性は、三つの体系ともかなりよく近似している。

四、食料需要は全体として、所得および食料価格の影響を受けやすいが、非食料価格の影響は小さい。

五、穀類、畜産物、野菜・果物の三つのグループを選んで、それらの間の関係をみると、米、その他穀類、肉、乳卵、野菜、果物の間の交叉弾力性は、三つの体系とも非常に安定しており、かなりよい近似値が得られる。交叉弾力性は総じて小さな値であるが、レサー体系の交叉弾力性と近接していることから、絶対値の小さなことは必ずしも「選好の直接的加法性」の影響によるものではない。

六、本分析の場合のように、中分類程度の財の分類では、所得効果がきわめて強く作用するため、交叉弾力性は大部分負になっている。また消費支出に対しては、所得弾力性が強く作用し、各財の支出比率の推移はレサーあるいはパウエル近似体系の所得弾力性によって説明されるような状況である。

七、最後に、議論をいったん効用関数の分析にもどすと、下級財を除く各財の基礎消費量が推定される。

〔参考文献〕

Frisch, R. (1954): "Linear Expenditure Functions: An Expository Article," *Econometrica*, Vol. 22, No. 4, pp. 505–510.

Frisch, R. (1959): "A Complete Scheme for Computing All Direct and Cross Demand Elasticities in a Model of Many Sectors," *Econometrica*, Vol. 27, No. 2, pp. 177–196.

Geary, R. C. (1949–50): "A Note on 'A Constant-Utility Index of the Cost of Living'," *Review of Economic Studies*, Vol. XVIII, No. 45, pp. 65–66.

Houthakker, H. S. (1960): "Additive Preferences," *Econometrica*, Vol. 28, No. 2, pp. 244–257.

Klein, L. R. and H. Rubin (1947–48): "A Constant-Utility Index of the Cost of Living," *Review of Economic Studies*, Vol. XV (2), No. 38, pp. 84–87.

Lau, L. J. (1970): *Duality and Utility Structure*, University Microfilms, Inc., Ann Arbor, Michigan.

Leser, C. E. V. (1960): "Demand Functions for Nine Commodity Groups in Australia," *Australian Journal of Statistics*, 2, pp. 102–113.

Leser, C. E. V. (1961): "Commodity Group Expenditure Functions for the United Kingdom, 1948–1957," *Econometrica*, Vol. 29, No. 1, pp. 24–32.

Pollak, R. A. (1971): "Additive Utility Functions and Linear Engel Curves," *Review of Economic Studies*, Vol. XXXVIII (4), No. 116, pp. 401–414.

Powell, A. A. (1966): "A Complete System of Consumer Demand Equations for the Australian Economy Fitted by a Model of Additive Preferences," *Econometrica*, Vol. 34, No. 3, pp. 661–675.

Powell, A. A., T. V. Hoa and R.H. Wilson (1968): "A Multi-Sectoral Analysis of Consumer Demand in the Post-War Period," *The Southern Economic Journal*, Vol. 35, No. 2, pp. 109–120.
Samuelson, P.A. (1947–48): "Some Implications of 'Linearity'," *Review of Economic Studies*, Vol. XV (2), No. 38, pp. 61–63.
佐々木康三・三枝義清(1972):「線型支出体系における食料需要関数」(『農業経済研究』第四四巻第1号)。
Stone, R. (1954a): "Linear Expenditure Systems and Demand Analysis: An Application to the Pattern of British Demand," *Economic Journal*, 64, pp. 511–527.
Stone, R., et al. (1954b): *The Measurement of Consumers' Expenditure and Behavior in the United Kingdom*, 1920–19 38, Vol. 1. Cambridge University Press.
Theil, H. (1965): "The Information Approach to Demand Analysis," *Econometrica*, Vol. 33, No. 1, pp. 67–87.
Theil, H. and R.H. Mnookin (1966): "The Information Value of Demand Equations and Predictions," *Journal of Political Economy*, Vol. 74, No. 1, pp. 34–45.
Yoshihara, K. (1969): "Demand Functions: An Application to the Japanese Pattern," *Econometrica*, Vol. 37, No. 2, pp. 257–274.

（研　究　員）

〔**後記**〕　この論文は，佐々木（帯広畜産大学助教授）が流動研究員として，本研究所研究員三枝と共に行なった研究成果である。研究内容の分担を明確にしえないので，共同執筆という形で発表することにした。

〔以下付表〕

付表1　パウエル体系の収束過程における残差平方和 ($\sum_t \varepsilon_{it}$) の推移

ラウンド ＼ i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum_i \sum_t \varepsilon_{it}^2$
0	3,944	1,108	942	851	1,754	476	1,441	704	4,223	7,480	22,923
1	4,486	1,168	1,448	740	1,532	1,721	1,366	764	3,590	8,669	25,484
2	4,369	1,160	1,654	675	1,548	3,068	1,209	747	3,621	8,085	26,136
3	4,267	1,163	1,585	685	1,577	3,827	1,235	748	3,720	8,505	27,312
4	4,207	1,164	1,830	701	1.592	4,223	1,264	743	3,767	8,532	28,023
5	4,174	1,165	1,857	711	1,825	4,340	1,283	743	3,792	8,564	28,454
6	4,161	1,166	1,868	716	1,589	4,500	1,291	743	3,803	8,547	28,384
7	4,164	1,165	1,809	716	1,598	4,544	1,290	743	3,805	8,573	28,407
8	4,147	1,166	1,875	720	1,599	4,560	1,299	743	3,812	8,574	28,495
9	4,147	1,166	1,877	721	1,599	4,569	1,300	743	3,813	8,573	28,508
10	4,147	1,166	1,885	721	1,599	4,573	1,299	743	3,813	8,569	28,515
11	4,145	1,166	1,876	721	1,599	4,573	1,300	743	3,814	8,575	28,512
12	4,147	1,166	1,876	721	1,599	4,575	1,300	743	3,814	8,568	28,509
13	4,147	1,166	1,876	721	1,599	4,575	1,300	743	3,813	8,568	28,508
14	4,147	1,166	1,876	721	1,599	4,575	1,300	743	3,813	8,568	28,508
15	4,147	1,166	1,876	721	1,599	4,575	1,300	743	3,813	8,568	28,508

注. $\varepsilon_i = y_i' - b_{iu}$

付表２　各品目の年次別支出比率 W_i

年次 ＼ i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1958	0. 11997	0. 02459	0. 04205	0. 02625	0. 02756	0. 03183	0. 01734	0. 02518	0. 12293	0. 56230
1959	0. 11194	0. 02241	0. 04088	0. 02748	0. 02827	0. 03153	0. 01723	0. 02567	0. 11892	0. 57567
1960	0. 10307	0. 01974	0. 04023	0. 02924	0. 02913	0. 03148	0. 01761	0. 02667	0. 11854	0. 58429
1961	0. 08796	0. 01866	0. 03919	0. 03050	0. 03050	0. 03268	0. 01836	0. 02774	0. 11757	0. 59684
1962	0. 07558	0. 01776	0. 03710	0. 03247	0. 03117	0. 03312	0. 01850	0. 02803	0. 11665	0. 60962
1963	0. 07129	0. 01800	0. 03626	0. 03353	0. 53141	0. 03168	0. 01923	0. 02841	0. 11523	0. 61496
1964	0. 06451	0. 01845	0. 03674	0. 03516	0. 03242	0. 02910	0. 02153	0. 02793	0. 11338	0. 62078
1965	0. 06528	0. 01873	0. 03697	0. 03583	0. 03239	0. 03109	0. 02102	0. 02806	0. 11149	0. 61914
1966	0. 05953	0. 01773	0. 03656	0. 03672	0. 03219	0. 02992	0. 02149	0. 02828	0. 10899	0. 62859
1967	0. 05485	0. 01617	0. 03691	0. 03699	0. 03137	0. 03137	0. 02156	0. 02960	0. 10712	0. 63406
1968	0. 05257	0. 01521	0. 03708	0. 03666	0. 03014	0. 02881	0. 02061	0. 03119	0. 10396	0. 64377
1969	0. 04690	0. 01472	0. 03618	0. 03679	0. 02873	0. 02767	0. 02086	0. 03280	0. 10131	0. 65404

付表3　品目別食料支出構成比　（単位：%）

年次 \ i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	全食料
1958	27.4	5.6	9.6	6.0	6.3	7.3	4.0	5.7	28.1	100.0
1959	26.4	5.3	9.6	6.5	6.7	7.4	4.1	6.0	28.0	100.0
1960	24.8	4.8	9.7	7.0	7.0	7.6	4.2	6.4	28.5	100.0
1961	21.8	4.6	9.7	7.6	7.6	8.1	4.5	6.9	29.2	100.0
1962	19.4	4.5	9.5	8.3	8.0	8.5	4.7	7.2	29.9	100.0
1963	18.5	4.7	9.4	8.7	8.2	8.2	5.0	7.4	29.9	100.0
1964	17.0	4.9	9.7	9.3	8.5	7.7	5.7	7.3	29.9	100.0
1965	17.1	4.9	9.7	9.4	8.5	8.2	5.5	7.4	29.3	100.0
1966	16.0	4.8	9.8	9.9	8.7	8.1	5.8	7.6	29.3	100.0
1967	15.0	4.4	10.1	10.1	8.6	8.6	5.9	8.1	29.2	100.0
1968	14.7	4.3	10.4	10.3	8.5	8.1	5.8	8.7	29.2	100.0
1969	13.6	4.2	10.5	10.6	8.3	8.0	6.0	9.5	29.3	100.0