需要理論における縁付き行列

三枝義清

問題と要約

制限つき極値問題に関連して縁付き行列（bordered matrix）が出てくるが、需要理論において縁付き行列は重要な役割をもっている。消費者需要の理論では、予算制約式のもとで効用関数を最大にするという前提から需要関数が導かれるが、所得や価格に関する各財の需要量の微少変化は、消費者需要の基本行列方程式と呼ばれる行列形式（1・2）で表わされる。

（1・2）における U^{**} は効用関数の第二次偏微係数よりなる対称行列で効用関数のヘシアン（Hessian）と呼ばれている。（1・2）の左辺の第一項はこのヘシアンに行と列を追加したところの縁付き行列になっている。この行列が正則で逆行列をもてば行列方程式を解くことにより $\partial x/\partial p$ とか $\partial x/\partial m$ が確定する。

逆行列を求めるには、クラーメルの公式を直接使うか、あるいは分割行列の逆行列に関する公式を利用するかであるが、後者の方がエコノメトリカルな需要分析には便利である。然しこの場合には H. Theil の分析例〔6〕、〔7〕にみられるように効用関数のヘシアンは negative definite という前提を置くのが普通である。これは主に分析上の便宜によるものであって効用関数を無条件にこのような級に限定するのは妥当でない。

ヘシアンが特異な行列になる場合の問題を H. Theil〔7〕は生産における要素需要の分析で扱っている。産出量が一定で投入財の価格所与のもとで費用を最小にするように投入量を決定する場合を考えると、消費者需要の基本行列方程式に対応するものとして（1・4）のような要素需要の微少変化に関する行列方程式がえられる。

生産関数が一次同次の場合には生産関数のヘシアンが特異な行列になるので縁付きヘシアンの逆行列を求めるには特別の工夫を要する。Theil は〔6〕で“Substitution flexibility”を利用する解法を述べているが、得られた結果は特殊解とでもいうべきものである。

この論文では、まず効用関数あるいは生産関数のヘシアンが特異な場合でも適用できるように縁付きヘシアンの逆行列を求める公式を導く。たとえば効用関数のヘシアン U^{**} が $V=U^{**}+\phi uu'$ を negative definite にするようなスカラーϕをもつものとすると、このような級の効用関数については次の公式が成立する。

$$\begin{bmatrix} U^{**} & u \\ u' & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2' & \phi+B_3 \end{bmatrix}$$

ただし，

u＝効用関数の第一次偏微係数よりなる列ベクトル

$B_1=V^{-1}-V^{-1}uu'V^{-1}/u'V^{-1}u$

$B_2=V^{-1}u/u'V^{-1}u$

$B_3=-1/u'V^{-1}u$

$V=U^{**}+\phi uu'$

ついでこの公式を基にして需要理論における基本的な諸関係の証明を述べ、併わせて Theil の Substitution flexibility による解法の特徴を明らかにしてある。

縁付きヘシアンの扱い方については Dhrymes〔4〕および Barten, Kloek and Lempers〔2〕に負うところが多い。

数学的解説

1　基本行列方程式

消費者需要の理論では予算制約式のもとで効用関数を最大にするという前提から需要関数が導かれるが

予算制約式…$p'x=m$

効用関数…$U(x)$

財の価格ベクトル…$p=[p_1, p_2, \cdots, p_n]'$

財の購入量ベクトル…$x=[x_1, x_2, \cdots, x_n]'$

所得…m　ラグランジュ乗数…λ

効用関数の勾配…$u=\left[\frac{\partial U}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial U}{\partial x_n}\right]'$

以上のような記号を用いると，最適購入量 x^0 は

(1・1)　$p'x=m$ のもとで $u-\lambda p=0$

という$(n+1)$個の式よりなる一階の条件を充たしている．いくつかの前提が効用関数に課されるが，この条件式を解くことにより需要関数がえられるが，(1・1)を所得や各財の価格で微分することにより各財の需要量の微少変化が知れる．その結果は次のような行列方程式にまとめられる．

$$(1\cdot 2)\quad \begin{bmatrix} U^{**} & -u/\lambda \\ u'/\lambda & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial m} & \frac{\partial x}{\partial p} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial m} & \frac{\partial \lambda}{\partial p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_{n\times 1} & \lambda I_{n\times n} \\ 1 & -x' \end{bmatrix}$$

ただし，　$U^{**}=\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}\right]\quad i,j=1,2,\cdots,n$

$$\frac{\partial x}{\partial m}=\left[\frac{\partial x_1}{\partial m},\cdots,\frac{\partial x_n}{\partial m}\right]'$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p}=\left[\frac{\partial \lambda}{\partial p_1},\cdots,\frac{\partial \lambda}{\partial p_n}\right]$$

$$\frac{\partial X}{\partial p}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial p_1}, \cdots, \frac{\partial x_1}{\partial p_n}\\ \vdots \quad\quad \vdots\\ \frac{\partial x_n}{\partial p_1} \quad\quad \frac{\partial x_n}{\partial p_n}\end{bmatrix}$$

$O_{n\times 1}$ は $n\times 1$ のゼロ行列，$I_{n\times n}$ は $n\times n$ の単位行列.

他方，生産における要素需要の分析において，産出量一定として費用を最小にするように投入量を決定する場合を考えてみる.

費用…$p'x$

生産関数…$F(x)$

定められた産出量…y^0　ラグランジュ乗数…λ

生産関数の勾配…$f=\left[\frac{\partial F}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right]'$

とすると，投入財の価格所与のもとでの最適投入量 x^0 に関する一階の条件は

(1・3)　$F(x)=y^0$ のもとで $p-\lambda f=0$

(1・3)を p および y^0 で微分することにより次のような要素需要に関する基本行列方程式がえられる.

(1・4)　$$\begin{bmatrix}\lambda F^{**} & f\\ f' & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial y^0} & \frac{\partial x}{\partial p}\\ \frac{\partial \lambda}{\partial y^0} & \frac{\partial \lambda}{\partial p}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}O_{n\times 1} & I_{n\times n}\\ 1 & O_{1\times n}\end{bmatrix}$$

ただし，$F^{**}=\left[\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}\right] \quad i,j=1,2,\cdots,n$

$$\frac{\partial x}{\partial y^0}=\left[\frac{\partial x_1}{\partial y^0},\cdots,\frac{\partial x_n}{\partial y^0}\right]'$$

$\dfrac{\partial \lambda}{\partial p}$, $\dfrac{\partial x}{\partial p}$ の定義は (1・2) に準ずる.

2　極値に関する二階の条件と Finsler の定理

(1・2) や (1・4) の行列方程式の解の存在については極値に関する二階の条件が重要な意味をもつので，効用関数の極大化を例にしてこの点を明らかにする.

効用関数について二つの仮定をおく.

(2・1)　$\dfrac{\partial U}{\partial x_i}>0 \qquad i=1,2,\cdots,n$　　かつ，少なくとも連続二次微分可能とする.

従ってヘシアン U^{**} は対称行列となる. 最適購入量 x^0 が端点解でなく，$x^0>0$ となる場合だけを考えると x^0 は (1・1) の他に次の二階の条件を充たしている[1].

$u'h=0$, $h\neq 0$ となるベクトル h に関して

(2・2)　$h'U^{**}h<0$

となる. u, U^{**} はいずれも x^0 で評価したもの.

この条件は Finsler の定理を用いて表現し直すことが出来る.

定理 1 (Finsler の定理, Bellman〔2〕を参照)

$h'Ch=0$, $h\neq 0$ となるベクトル h に関して, $h'Ah>0$ であれば

$$A+\phi C$$

を positive definite にするようなスカラー $\phi(>0)$ が存在する. ただし C は任意な positive semidefinite な行列とする.

この定理 1 から次のことが判かる. 二階の条件 (2・2) が充たされていれば

(2・3)　$h'uu'h=0$

となるベクトル h に関して $h'(-U^{**})h>0$

uu' は階数が 1 の positive semi-definite な行列だから定理 1 によって $U^{**}+\phi uu'$ を negative definite にするような $\phi(<0)$ が存在することが判かる.

他方このような ϕ が存在するものとすれば $u'h=0$ $h\neq 0$ に関して

$$h'(U^{*}{}_{*}+\phi uu')h=h'U^{**}h<0$$

となる. 従って二階の条件 (2・2) は, $\phi(<0)$ を適当に選ぶことにより $V\equiv U^{**}+\phi uu'$ を negative definite に出来るという条件と同等である. 特に明示しないが ϕ は一般に x の関数になっている.

Dhrymes〔4〕によれば, 行列方程式 (1・2) の解が確定するための条件は次の定理で与えられる.

定理 2

需要関数が正領域の各点で微分可能になるための必充条件は効用関数が次の性質をもつことである．$x>0$ に関して

(2・4)　$V \equiv U^{**}+\phi uu'$

が negative definite となるような $\phi(x)$ が存在する．

本論文で対象にする効用関数はすべて(2・4)を充たすものと仮定するが，定理2より知れるように(2・4)を充たす効用関数のクラスは実用的には充分に広いクラスになっている．その中にはヘシアンが negative definite となるものの他に，特異なヘシアンをもつ効用関数も含まれてくる．ヘシアンが特異になる場合を検討してみよう．この場合には次の諸定理が成り立つ．

定理3

効用関数のヘシアン U^{**} が (2・4) を充たし，かつ特異であれば U^{**} は negative semidefinite で，その階数は $n-1$ である．

証明

$V \equiv U^{**}+\phi uu'$ が negative definite になるように $\phi(<0)$ を選ぶ．

$$\frac{U^{**}}{\phi}=\frac{V}{\phi}-uu'=W-Z$$

ただし，$W=V/\phi \qquad Z=uu'$

とすると W は positive definite，Z は positive semidefinite である．すると W と Z の間には次のような正則な行列 T が存在する．この点については Dhrymes〔5, p. 582 の corollary 5〕を参照．

$$W=TT' \qquad T'MT=Z$$

$$M=\begin{bmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{bmatrix}$$

ただし，μ_i は方程式 $|\mu W-Z|=0$ の根で，$\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \cdots \geqq \mu_n$ である．

Z の階数は1だから n 個の根のうちの $n-1$ 個はゼロである．また U^{**} は特異だから $|W-Z|=0$ となる．従って $\mu_1=1 \quad \mu_2=\cdots=\mu_n=0$ である．$W-Z$ より二次形式を作ると

$$h'(W-Z)h=(Th)'(Th)-(Th)'M(Th)=x'x-x'Mx$$

$$=\sum_{i=1}^{n} x_i^2-x_1^2=\sum_{i=2}^{n} x_i^2 \qquad \text{ただし，} x \equiv Th$$

$h \neq 0$ に関して $h'(W-Z)h \geqq 0$ だから，$W-Z=U^{**}/\phi$ は positive semidefinite となる．$\phi<0$ だから U^{**} は negative semidefinite である．

U^{**} の階数が $n-1$ であることは

$$W-Z=T'(I_{n\times n}-M)T$$

において $I_{n\times n}-M$ の階数が $n-1$ であることから明らか．　（証明終り）

定理 4

U^{**} が (2・4) を充たし，かつ特異であれば (2・4) の ϕ は任意の負の値をとりうる．また次の関係が成立する．

$$u'V^{-1}u=1/\phi \qquad \text{ただし，} V=U^{**}+\phi uu'$$

証明

(1)　定理３によって U^{**} は negative semidefinite であるから，$\phi<0$ であれば

$u'h \neq 0$ に関して $h'(U^{**}+\phi uu')h<0$

一方 $u'h=0$ に関しては $h'U^{**}h'=h'(U^{**}+\phi uu')h<0$

従って如何なる $\phi<0$ についても $V=U^{**}+\phi uu'$ は negative semidefinite となる.

(2)　定理３で用いた行列式 $|\mu W-uu'|$ は次のように表わされる.

$$|\mu W-uu'|=|T'|^2\,|\mu I_{n\times n}-(T')^{-1}uu'(T)^{-1}|$$

従って $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ は次の方程式の根であるが

$$|\mu I_{n\times n}-(T')^{-1}uu'(T)^{-1}|=0$$

この方程式の左辺は

$$\text{左辺}=\mu^{n-1}(\mu-u'(T)^{-1}(T')^{-1}u)=\mu^{n-1}(\mu-u'Wu)$$

定理３で述べたように $\mu_1=1 \quad \mu_2=\cdots\mu_n=0$ だから

$$1=u'Wu=u'(V/\phi)u'^{-1}u=\phi u'V^{-1}u$$

（証明終り）

ヘシアンが（2・4）を充たす場合の縁付きヘシアンについては Dhrymess〔４〕, Barteu, Kloek and Lempers〔２〕によって次の定理が証明されている.

定理５

U^{**} が(2・4)を充たせば次の縁付き行列 U^{*} は正則である.

$$U^{*}=\begin{bmatrix} U^{**} & u \\ u' & 0 \end{bmatrix}$$

注1) m 個の制約式のもとで $F(x)$ を極大化する問題において（x は n 次のベクトルとする）

制約式…$g^{k}(x)=0 \quad k=1,2,\cdots,m, (m<n)$

ラグランジュ関数…$L(x,\lambda)=F(x)-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k g^{k}(x)$

とすると，$F(x)$ が x^0 で（局所的）極大となるには

$g^{k}(x^0)=0 \quad k=1,2,\cdots,m$ のもとで

$$\left.\frac{\partial L}{\partial x_i}\right|_{x=x^0}=0 \quad i=1,2,\cdots,n$$

となるという一階の条件の他に，次の二階の条件を充たさねばならない.

$Gh=0$, $h\neq 0$ に関して $h'L^{**}h<0$

ただし，$h=[h_1,\cdots,h_n]'$ $\quad G=\left[\frac{\partial g^k}{\partial x_i}\right] \begin{matrix} k=1,2,\cdots,m \\ i=1,2,\cdots,n \end{matrix}$ $\quad L^{**}=\left[\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}\right] i,j=1,2,\cdots,n$

効用関数極大の場合には

$L(x,\lambda)=U(x)-\lambda(m-p'x)$

で $L^{**}=U^{**}$ となる.

3 縁付きヘシアンの逆行列

U を $n\times n$ の対称行列，u を $n\times 1$ の行列とすると U が正則で逆行列をもてば，よく知られているように次の縁

付き行列の逆行列は(3・1)で与えられる.

$$(3\cdot1)\quad \begin{bmatrix} U & u \\ u' & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2' & B_3 \end{bmatrix}$$

ただし，$B_1 = U^{-1} - \dfrac{U^{-1}uu'U^{-1}}{\beta}$　　$B_3 = -1/\beta$

$B_2 = U^{-1}u/\beta$　　$\beta = u'U^{-1}u$

U が効用関数のヘシアン U^{**} を表わす場合には，効用関数が一次同次のときにみられるように，U^{**} が特異になるケースが出てくるから，(3・1)の公式では限られた効用関数しか扱えない．しかし二階の条件に注目すると，ヘシアンが正則であると限定しなくても効用関数が(2・4)を充たすものであれば，縁付きヘシアン U^* の逆行列を求める公式を導くことが出来る.

前提によって $V = U^{**} + \phi uu'$ を negative definite にするような $\phi(<0)$ が存在している.

次の方程式を充たす部分行列 C_1, C_2, C_3 を求めてみる.

$$(3\cdot2)\quad \begin{bmatrix} U^{**} & u \\ u' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_2' & C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n\times n} & O_{n\times 1} \\ O_{1\times n} & 1 \end{bmatrix}$$

(3・2)の両辺に次の行列を（前から）乗ずると

$$\begin{bmatrix} I_{n\times n} & \phi u \\ O_{1\times n} & 1 \end{bmatrix}$$

(3・2)は

$$\begin{bmatrix} V & u \\ u' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_2' & C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n\times n} & \phi u \\ O_{1\times n} & 1 \end{bmatrix}$$

となる．V は正則だから(3・1)を用いて C_1 等を求めると

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_2' & C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2' & \phi+B_3 \end{bmatrix}$$

即ち次の公式が得られる．

$$(3\cdot 3)\quad \begin{bmatrix} U^{**} & u \\ u' & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2' & \phi+B_3 \end{bmatrix}$$

ただし，$B_1=V^{-1}-V^{-1}uu'V^{-1}/u'V^{-1}u$　　$B_3=-1/u'V^{-1}u$

$B_2=V^{-1}u/u'V^{-1}u$　　$V=U^{**}+\phi uu'$

U^{**} が正則とすると

$$V^{-1}=U^{**-1}-\frac{\phi U^{**-1}uu'U^{**-1}}{1+\phi u'U^{**-1}u}$$

と V^{-1} を展開できるから，この関係を使えば (3・3) の B_1 等は次のようにも表わせる[2]．

$$(3\cdot4)\quad \begin{aligned} B_1 &= U^{**-1} - U^{**-1}uu'U^{**-1}/\beta \\ B_2 &= U^{**-1}u/\beta \\ \phi + B_3 &= -1/\beta \\ \beta &= u'U^{**-1}u \end{aligned}$$

当然のことであるが，(3・1)の結果と一致する.

他方 U^{**} が特異である場合には定理４によって

$$(3\cdot5)\quad \phi + B_3 = 0$$

注２）　次の公式を利用する．A は $n\times n$ の正則行列，c および d は $n\times 1$ の行列．$A+cd'$ が正則であれば

$$(A+cd')^{-1} = A^{-1} - \frac{(A^{-1}c)(d'A^{-1})}{1+d'A^{-1}c}$$

従って

$$V^{-1} = (U^{**} + \phi uu')^{-1} = U^{**-1} - \frac{\phi U^{**-1}uu'U^{**-1}}{1+\phi u'U^{**-1}u}$$

と展開できる．この式を使うと

$$u'V^{-1}u = u'U^{**-1}u - \frac{\phi u'U^{**-1}uu'U^{**-1}u}{1+\phi u'U^{**-1}u} = \frac{u'U^{**-1}u}{1+\phi u'U^{**-1}u}$$

従って

$$\phi + B_3 = \phi - \frac{1}{u'V^{-1}u} = \phi - \frac{1+\phi u'U^{**-1}u}{u'U^{**-1}u} = \frac{-1}{u'U^{**-1}u}$$

をうる．(3・3) の B_2 は

$$B_2 = \frac{V^{-1}u}{u'V^{-1}u} = \frac{1}{u'V^{-1}u}\left(U^{**-1}u - \frac{\phi U^{**-1}uu'U^{**-1}u}{1+\phi u'U^{**-1}u}\right) = \frac{U^{**-1}u}{u'U^{**-1}u}$$

この式を利用すると

$$\frac{V^{-1}uu'V^{-1}}{u'V^{-1}u}=\left(\frac{V^{-1}u}{u'V^{-1}u}\right)\left(\frac{u'V^{-1}}{u'V^{-1}u}\right)u'V^{-1}u=\frac{U^{**-1}uu'U^{**-1}}{u'U^{**-1}u(1+\phi u'U^{**-1}u)}$$

従って（3・3）の B_1 は

$$B_1=V^{-1}-\frac{V^{-1}uu'V^{-1}}{u'V^{-1}u}=U^{**-1}-\frac{\phi U^{**-1}uu'U^{**-1}}{1+\phi u'U^{**-1}u}-\frac{U^{**-1}uu'U^{**-1}}{u'U^{**-1}u(1+\phi u'U^{**-1}u)}$$

$$=U^{**-1}-\frac{U^{**-1}uu'U^{**-1}}{u'U^{**-1}u}$$

（証明終り）

4　生産における要素需要関数について

生産関数 $F(x)$ は $\partial F/\partial x_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ で，連続二次微分可能であるものとする．$F(x)$ の勾配を f，ヘシアンを F^{**} と表わす．産出量一定で費用を最小化する場合を考えると，最適投入量 $x^0(>0)$ は一階の条件（1・3）の他に次の二階の条件を充たしている．

$f'h=0,\ h\neq 0$ に関して

$$h'F^{**}h<0$$

ただし，$f,\ F^{**}$ は x^0 で評価したもの．

定理 1 によればこの条件は

$$G=F^{**}+\phi ff'$$

が negative definite になるような $\phi(<0)$ が存在する，という条件と同等である．要素需要関数の場合にも定理 2 と同じ定理が成立するわけであるが，以下対象にする生産関数は次の性質をもつものとする．$x>0$ に関して

(4・2)　$G \equiv F^{**} + \phi f f'$

(4・2) の G が negative definite になるような $\phi(x)$ が存在する.

この場合には縁付きヘシアンは正則になるから行列方程式 (1・4) を解くことが出来る.

$$\begin{bmatrix} \lambda F^{**} & f \\ f' & 0 \end{bmatrix} = BF^{*}B^{*}$$

ただし，$B = \begin{bmatrix} \lambda I_{n\times n} & O_{n\times 1} \\ O_{1\times n} & 1 \end{bmatrix}$　$B^{*} = \begin{bmatrix} I_{n\times n} & O_{n\times 1} \\ O_{1\times n} & 1/\lambda \end{bmatrix}$　$F^{*} = \begin{bmatrix} F^{**} & f \\ f' & 0 \end{bmatrix}$

と表わされるから，(1・4)の解は

$$(4.3)\quad \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial y^0} & \dfrac{\partial X}{\partial P} \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial y^0} & \dfrac{\partial \lambda}{\partial P} \end{bmatrix} = B^{*-1}F^{*-1}B^{-1}\begin{bmatrix} O_{n\times 1} & I_{n\times n} \\ 1 & O_{1\times n} \end{bmatrix}$$

(3・3) を導いたのと全く同じ手続きで F^{*} の逆行列を求めることが出来る．即ち

$$(4\cdot 4)\quad F^{*-1} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_2' & \phi + C_3 \end{bmatrix}$$

ただし，$C_1 = G^{-1} - G^{-1}ff'G^{-1}/f'G^{-1}f$　　$C_3 = -1/f'G^{-1}f$

$C_2 = G^{-1}f/f'G^{-1}f$　　$G = F^{**} + \phi f f'$

F^{**}が正則である場合に(4・4)のC_1, C_2において，GがF^{**}で代置されることは効用関数の場合と同じである．

なお

$$(4\cdot5)\quad \phi+C_3=-1/f'F^{**-1}f \cdots F^{**}\text{が正則のとき}$$
$$=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots F^{**}\text{が特異のとき}$$

(4・4)を使って(4・3)から次の結果がえられる．

$$(4\cdot6)\quad \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial y^0} & \dfrac{\partial X}{\partial P} \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial y_0} & \dfrac{\partial \lambda}{\partial P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & C_1/\lambda \\ \lambda(\phi+C_3) & C_2' \end{bmatrix}$$

ただし，C_1, C_2, C_3の定義は(4・4)と同じ．

(4・6)を用いて要素需要関数に関する性質が導ける．

性質1　限界費用について

$C=p'x$ とおくと

$$\frac{\partial C}{\partial y^0}=p'\frac{\partial X}{\partial y^0}=p'C_2=\lambda>0$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^{02}}=\frac{\partial \lambda}{\partial y^0}=\lambda(\phi+C_3)=\lambda(\phi-1/f'G^{-1}f)=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots F^{**}\text{が特異ならば}$$

$$=-\lambda/f'F^{**-1}f>0\cdots F^{**-1}\text{が negative definite ならば}$$

性質2　$\dfrac{\partial X}{\partial y^0}$について

(4・6) より

$$(4\cdot7)\quad \frac{\partial x}{\partial y^0}=\left(\frac{\partial \lambda}{\partial P}\right)'$$

もし F^{**} が negative definite で，かつ $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \geqq 0\ (i \neq j)$ であれば Dhrymes〔4〕によって

$$\frac{\partial x}{\partial y^0}=F^{**-1}f/f'F^{**-1}f>0$$

となることが証明されている．もし F^{**} が negative semidfinite で $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}>0\ (i \neq j)$ であれば，

$$G=[g_{ij}]=F^{**}+\phi ff'$$

において $g_{ij} \geqq 0\ (i \neq j)$，かつ G が negative definite になるように $\phi(<0)$ を選べるから

$$\frac{\partial X}{\partial y^0}=G^{-1}f/f'G^{-1}f>0$$

となることが判かる．

性質 3　$\frac{\partial X}{\partial P}$ について

(4・6) より

$$(4\cdot8)\quad \frac{\partial X}{\partial P}=\frac{1}{\lambda}C_1$$

ただし，$C_1=G^{-1}-G^{-1}ff'G^{-1}/f'G^{-1}f$

C_1 が対称であることは明らかだが，C_1 は次の二つの性質をもっている．

性質3・1　$f'C_1=0$ だから C_1 は特異である．

証明

$$f'C_1=f'G^{-1}-\frac{f'G^{-1}ff'G^{-1}}{f'G^{-1}f}=0$$

（証明終り）

従って価格ベクトル p に対応する最適投入量においては $p'C_1=0$

性質3・2　C_1 は negative semidefinite で，階数は $n-1$ である．

証明

$$C_1=\frac{1}{w}[wG^{-1}-G^{-1}ff'G^{-1}]=\frac{1}{w}[W-Z]$$

ただし，$w=f'G^{-1}f$　　$W=wG^{-1}$　　$Z=G^{-1}ff'G^{-1}$

G^{-1} が negative definite だから $w<0$ で，W は positive definite，Z は positive semidefinite となる．性質3・1より C_1 は特異であるから $W-Z$ も特異な行列となる．定理3の証明と全く同じ要領で $W-Z$ が positive semidefinite でその階数が $n-1$ であることが判かる．

（証明終り）

性質3・2より C_1 は negative semidefinite で，階数が $n-1$ だから C_1 の次数 $k(\leqq n-1)$ の principal submatrix はすべて negative definite になる．従って C_1 の対角線上の要素は負となり

$$\frac{\partial x_i}{\partial P_i}<0 \qquad i=1,2,\cdots,n$$

各投入量の価格弾力性を求めてみる.

$$(4\cdot 9) \quad \frac{\partial X}{\partial y^0}=G^{-1}f/f'G^{-1}f$$

を使って(4・8)を変形すると

$$(4\cdot 10) \quad \frac{\partial X}{\partial P}=\frac{G^{-1}}{\lambda}-\left(\frac{\partial X}{\partial y^0}\right)\left(\frac{\partial X}{\partial y^0}\right)'\frac{f'G^{-1}f}{\lambda}$$

従って

$$\frac{\partial x_i}{\partial P_j}=\frac{g^{ij}}{\lambda}-\frac{\partial x_i}{\partial y^0}\frac{\partial x_j}{\partial y^0}\frac{f'G^{-1}f}{\lambda}$$

ただし，$G^{-1}=[g^{ij}]$

弾力性形式で表わすと

$$(4\cdot 11) \quad \frac{\partial(\log x_i)}{\partial(\log p_j)}=\frac{g^{ij}p_j}{\lambda x_i}-W_j{}^*\eta_i\varphi$$

ただし，$\eta_i=\dfrac{\partial(\log x_i)}{\partial(\log y^0)} \qquad \varphi=f'G^{-1}f/y^0$

$$W_j{}^*=\frac{P_jx_j\eta_j}{\lambda y^0}=\lambda^{-1}\frac{\partial(p_jx_j)}{\partial y^0}$$

(4・9) によって φ および W_j^* には次の関係が成立している.

$$(4\cdot 12)\quad \sum_{j=1}^{n}\frac{g^{ij}p_j}{\lambda x_i}=\eta_i\varphi$$

$$(4\cdot 13)\quad \sum_{i=1}^{n}W_j^*=1$$

各投入財の需要関数は次のように定式化できるが,

$$d(\log x_i)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(\log x_i)}{\partial(\log p_j)}d(\log p_j)+\eta_i d(\log y^0)\qquad i=1,2,\cdots,n$$

(4・11)〜(4・13)を用いると

$$(4\cdot 14)\quad d(\log x_i)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{g^{ij}p_j}{\lambda x_i}\right)d(\log \bar{p}_j)+\eta_i d(\log y^0)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{g^{ij}p_j}{\lambda x_i}\right)=\eta_i\varphi\qquad i=1,2,\cdots,n$$

ただし, $d(\log\bar{p}_j)=d(\log p_j)-d(\log p)$

$$d(\log p)=\sum_{j=1}^{n}W_j^*d(\log p_j)$$

$d(\log p)$ は W_j^* (marginal cost share) で加重した投入財価格指数の変化を表わしているから, $\left(\dfrac{g^{ij}p_j}{\lambda x_i}\right)$ はデフレートされた投入財価格に関する価格弾力性を表わしていることになる.

（1） 生産関数が一次同次の場合

$F(x)$ が一次同次とすると，オイラーの定理から

$$(4 \cdot 15) \quad F(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i x_i \qquad \text{ただし，} f_i=\partial F/\partial x_i \quad i=1,2,\cdots,n$$

(4・15) の両辺を $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ で偏微分すると

$$F^{**}x=0$$

となるから，ヘシアン F^{**} は特異である．$F(x)$ は (4・2) を充たすものと前提してあるから，定理 3 の U^{**} と同じように F^{**} は negative semidefinite で階数は $n-1$ となる．また任意の $\phi(<0)$ に対して $G\equiv F^{**}+\phi ff'$ は negative definite となる．

(4・15)によって最適投入量 x^0 におけるラグランジュ乗数 λ は

$$(4 \cdot 16) \quad \lambda=p'x^0/y^0 \qquad \text{ただし，} y^0=F(x^0)$$

(4・7) と (4・16)より

$$(4 \cdot 17) \quad \frac{\partial x}{\partial y^0}=\frac{x}{y^0}=\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y^0}\right)'$$

従って

$$\eta_i=1 \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad \text{かつ} \quad f'G^{-1}f=1/\phi$$

既に述べたように $\dfrac{\partial \lambda}{\partial y^0}=0$ だから x/y^0 は p だけの関数になる．以上の結果を用いると，一次同次の場合には需

要関数 (4・14) は次のように書ける.

$$(4\cdot 18)\quad d\left(\log\frac{x_i}{y^0}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{g^{ij}y^0W_j}{x_ix_j}\right)d(\log\bar{p}_j)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{g^{ij}y^0W_j}{x_ix_j}\right)=1/y^0\phi$$

ただし, $d(\log\bar{p}^j)=d(\log p_j)-\sum_{j=1}^{n}W_jd(\log p_j)$

$W_j=p_jx_j/\lambda y^0$ (average cost share)

(2) Theil の "substitution flexibility" について

$F(x)$ が一次同次の場合の行列方程式 (1・4) の解法については Theil の研究 [6], [7] があるが, その手続きは次の通りである.

まず(1・4)より次の方程式を導く.

$$(4\cdot 19)\quad F^{**}\frac{\partial X}{\partial p}=\frac{I_{n\times n}}{\lambda}-\frac{px'}{\lambda^2y^0}$$

投入財 i と投入財 j の代替弾力性を $\alpha_{ij}{}^{-1}$ とすると, 生産関数が一次同次の場合には

$$(4\cdot 20)\quad y^0\frac{\partial^2F}{\partial x_i\partial x_j}=\alpha_{ij}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j}\quad (i\neq j)$$

まず代替弾力性がすべての組について均しくて $\alpha_{ij}=\alpha(i\neq j)$ と表わせる場合を考えてみる.

$$(4\cdot 21)\quad y^0F^{**}-\alpha ff'\equiv y^{02}Z$$

ただし，$Z=\frac{F^{**}}{y^0}-\frac{\alpha pp'}{(\lambda y^0)^2}$

とすると(4・21)の Z は対角行列になる.

$$\alpha>0 \quad かつ \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i{}^2}<0 \qquad i=1,2,\cdots,n$$

という仮定をおくと Z は negative definite になる.

(4・19) より

$$(4\cdot 22) \quad Z\frac{\partial x}{\partial p}=\frac{I_{n\times n}}{\lambda y^0}-\frac{px'}{(\lambda y^0)^2}$$

Z は正則だから(4・22)に Z^{-1} を乗じて $\frac{\partial X}{\partial p}$ を導く.

代替代弾力性がすべての組を通じて均しくない場合には次のような α_{ij} の加重値 α (sbstitution flexibility と呼んでいる) を使って Z を定義して(4・22)を導く.

$$(4\cdot 23) \quad \alpha\equiv\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(W_i+W_j)\alpha_{ij} \qquad ただし，W_i=p_ix_i/\lambda y^0$$

$$Z=\frac{F^{**}}{y^0}-\frac{\alpha pp'}{(\lambda y^0)^2}$$

$\alpha>0$ かつ F^{**} が negative semidefinite とすると，Z は正則となることが証明できるから (4・22) に Z^{-1} を乗じて $\frac{\partial X}{\partial p}$ を導く.

以上が Theil の手続きであるが，彼の方法は Z の内容から知れるように (4・2) において，ϕ を$-\alpha/y^0$ と置いて F^* の逆行列を求めていることに他ならない．Z と G の関係は

$$G=F^{**}+\phi ff' \quad \phi=-\alpha/y^0 \qquad Z=G/y^0$$

だから

$$Z^{-1}=[z^{ij}] \text{ とすると } z^{ij}=y^0g^{ij}$$

従って(4・18)は次のようになる

$$(4\cdot 24)\quad d\left(\log\frac{x_i}{y^0}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{z^{ij}W_j}{x_ix_j}\right)d\,(\log\bar{p}_j)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{z^{ij}W_j}{x_ix_j}\right)=-\frac{1}{\alpha}$$

(4・24)は Theil が〔6 の8・6節〕で導いた式に他ならない．

F が一次同次のとき F^* の逆行列を求めるのに際して $\phi\,(<0)$ の選び方は任意であるが，代替弾力性がすべての組を通じて均しくかつ正である場合には $\phi=-\alpha/y^0$ とおくのが得策である．何故ならこの場合には G^{-1} が対角行列となり(4・24)における係数を次のように表わせるからである．

$$(2\cdot 25)\quad \frac{z^{ij}W_j}{x_ix_j}=0\ (i\neq j) \qquad \frac{z^{ij}W_i}{x_ix_i}=-\frac{1}{\alpha} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

たとえば生産関数が C・E・S 型であるとすると

$$F(x)=\left(\sum_{i=1}^{n}\theta_i x_i^{-\rho}\right)^{-1/\rho} \qquad \theta_i>0 \quad \sum\theta_i=1 \quad \rho>-1$$

(4・20) の α_{ij} は $\alpha_{ij}=\rho+1$ $(i\neq j)$ となる.

従って要素需要関数は

$$d\left(\log\frac{x_i}{y^0}\right)=-\frac{1}{1+\rho}d(\log\bar{p}_i) \qquad i=1,2,\cdots,n$$

Theilによる (4・24), (4・25) の算出では $\alpha>0$ という仮定が必要であるが, 先に述べたように生産関数が (4・2) を満足しておれば縁付ヘシアン F^* の逆行列を求めることは容易であり, ϕ (<0) を任意に選んでも (4・18) が成立するのである.

5　Allen の偏代替弾力性について

生産関数が一次同次の場合の縁付きヘシアンの逆行列は Allen の偏代替弾力性に関する議論〔1〕の中に出てくるが, Allen の説明を4節で導いた結果を使ってアレンジしてみる.

F^* の逆行列は次のように表わされる.

$$(5\cdot1) \quad \begin{bmatrix} F^{**} & f \\ f' & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2' & B_3 \end{bmatrix}$$

ただし, $B_1=[b_{ij}]=G^{-1}-G^{-1}ff'G^{-1}/f'G^{-1}f$

$$G=F^{**}+\phi ff'$$

投入財 i と投入財 j の間の偏代替弾力性 σ_{ij} は

$$(5\cdot2)\quad \sigma_{ij}=\frac{y}{x_i x_j}b_{ij},\quad y=F(x)$$

で定義されるものである．生産関数は一次同次だから限界費用と平均費用は共にラグランジュ乗数(λ)に均しく産出量には依存しない．投入財価格 (p) は所与として，産出物が競争市場で λ に均しい価格で販売されるという情況を考えてみる．

生産物の需要関数を $H(\lambda)$ とすると，投入量 x 並びに λ の均衡値は次式を満足する．

$$(5\cdot3)\quad p-\lambda f=0 \qquad H(\lambda)-F(x)=0$$

(5・3) より $\partial x/\partial p$ を規定する行列方程式がえられる．

$$(5\cdot4)\quad \begin{bmatrix} \lambda F^{**} & f \\ f' & \dfrac{-dH}{d\lambda} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial p} \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial p} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_{n\times n} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$dH/d\lambda<0$ である場合には，生産関数が (3・2) を充たせば (5・4) の左辺の縁付き行列は正則となって，$\partial X/\partial p$ は次のように与えられる．

$$(5\cdot5)\quad \frac{\partial x}{\partial p}=\frac{1}{\lambda}\left[F^{**}-\frac{ff'}{\beta}\right]^{-1} \qquad ただし，\ \beta=-\lambda\frac{dH}{d\lambda}>0$$

$\partial X/\partial p$ と偏代替弾力性 σ_{ij} との関係を求めるには (5・1) の B_1 を次のように展開すればよい．$F(x)$ は一次同次だから

$$(5\cdot6)\quad B_1=G^{-1}-\frac{xx'}{\phi y^{02}}$$

(5・6) の ϕ を $\phi=-1/\beta<0$ に置くと

$$B_1=\left[F^{**}-\frac{ff'}{\beta}\right]^{-1}+\frac{xx'}{y^0}\eta$$

ただし，$\eta=\beta/y^0=-\dfrac{\lambda}{y^0}\dfrac{dH}{d\lambda}=(-1)\times$需要の価格弾力性

(5・5) によって

$$(5\cdot7)\quad B_1=\lambda\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{xx'}{y^0}\eta$$

従って

$$\sigma_{ij}=\frac{y^0 b_{ij}}{x_i x_j}=\frac{y^0}{x_i x_j}\left(\lambda\frac{\partial x_i}{\partial p_j}+\frac{x_i x_j}{y^0}\eta\right)=\frac{y^0\lambda}{p_j x_j}\,\frac{\partial(\log x_i)}{\partial(\log p_j)}+\eta$$

書き改めると

$$(5\cdot8)\quad \frac{\partial(\log x_i)}{\partial(\log p_j)}=W_j(\sigma_{ij}-\eta)\qquad \text{ただし，}W_j=\frac{p_j x_j}{\lambda y^0}=\frac{p_j x_j}{\Sigma p_j x_j}$$

なお，Allen の偏代替弾力性 σ_{ij} と (4・18) における価格弾力性との関係は次の通りである．

(5・9) $\sigma_{ij}=\dfrac{g^{ij}y^{0}}{x_i x_j}-\dfrac{1}{\phi y^{0}}$

$\alpha_{ij}=\alpha>0\ (i\neq j)$ の場合には $\phi y^{0}=-\alpha$ とおけば (4・25) によって

(5・10) $\sigma_{ij}=1/\alpha(i\neq j)\qquad \sigma_{ii}=\dfrac{1}{\alpha}\left(1-\dfrac{1}{W_i}\right)$

という関係式がえられる.

6 消費者の需要関数について

行列方程式(1・2)における縁付き行列を次のように表わす.

(6・1) $\begin{bmatrix} U^{**} & -u/\lambda \\ u'/\lambda & 0 \end{bmatrix}=DU^{*}D^{*}$

ただし, $D=\begin{bmatrix} I_{n\times n} & O_{n\times 1} \\ O_{1\times n} & 1/\lambda \end{bmatrix}\qquad D^{*}=\begin{bmatrix} I_{n\times n} & O_{n\times 1} \\ O_{1\times n} & -1/\lambda \end{bmatrix}\qquad U^{*}=\begin{bmatrix} U^{**} & u \\ u' & 0 \end{bmatrix}$

効用関数が(2・4)を充たせば U^{*} の逆行列は(3・3)で与えられるから

(6・2) $\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial m} & \dfrac{\partial x}{\partial p} \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial m} & \dfrac{\partial \lambda}{\partial p} \end{bmatrix}=D^{*-1}U^{-1}D^{-1}\begin{bmatrix} O_{n\times 1} & \lambda I_{n\times n} \\ 1 & -x' \end{bmatrix}$

(6・2) は次のように表わせる.

$$(6 \cdot 3) \quad \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial m} & \dfrac{\partial x}{\partial p} \\[2ex] \dfrac{\partial \lambda}{\partial m} & \dfrac{\partial \lambda}{\partial p} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} \lambda B_2 & \lambda B_1 - \lambda B_2 x' \\[2ex] -\lambda^2(\phi + B_3) & -\lambda^2 B_2' + \lambda^2(\phi + B_3)x' \end{array}\right]$$

ただし，$B_1 = V^{-1} - V^{-1}uu'V^{-1}/u'V^{-1}u \qquad B_3 = -1/u'V^{-1}u$

$B_2 = V^{-1}u/u'V^{-1}u \qquad V = U^{**} + \phi uu'$

(6・3)より $\dfrac{\partial X}{\partial m}$, $\dfrac{\partial X}{\partial p}$ 等を求めると

$$(6 \cdot 4) \quad \frac{\partial x}{\partial m} = \frac{\lambda V^{-1}u}{u'V^{-1}u} = \frac{V^{-1}p}{p'V^{-1}\rho}$$

$$(6 \cdot 5) \quad \frac{\partial x}{\partial p} = \lambda\left[V^{-1} - \frac{V^{-1}ff'V^{-1}}{f'V^{-1}f}\right] - \left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)x'$$

$$(6 \cdot 6) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial m} = -\lambda^2(\phi + B_3) = 0 \cdots\cdots U^{**} \text{ が特異}$$

$$< 0 \cdots\cdots U^{**} \text{ が negative definite}$$

$$(6 \cdot 7) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial p} = -\lambda^2 B_2' + \lambda^2(\phi + B_3)x'$$

従って

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p}+\frac{\partial \lambda}{\partial m}x'=-\lambda\left(\frac{\partial x}{\partial m}\right)'$$

(6・5)の右辺の第一項即ち λB_1 は "substitution matrix" と呼ばれている行列であるが，λB_1 には次の性質がある.

性質１　$u'B_1=B_1u=0$

λB_1 は negative semidefinite で階数は $n-1$ である.

証明　４節の性質２・１および２・２の場合と同じ.

性質２　$U(x)$ を任意な単調増加関数で変換しても λB_1 は不変である.

証明　$U(x)$ を変換した関数を $H(x)$ として

$$H(x)=G(U(x)) \qquad G'(\cdot)>0$$

$$h=\left[\frac{\partial H}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial H}{\partial x_n}\right]',\ H^{**}=\left[\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}\right]$$

とすると $U(x)$ が条件 (2・4) を充たせば $H(x)$ も (2・4) を充たす．即ち

$W=H^{**}+\mu hh'$ を negative definite にするような μ が存在する．かつ

$W=G'(V+\varphi uu'),\ \varphi<0$

と表わすことが出来る．$H(x)$ から得られる substitution matrix は

$$\rho\left(W^{-1}-\frac{W^{-1}hh'W^{-1}}{h'W^{-1}h}\right) \qquad \text{ただし，} \rho=G'\lambda$$

であるが，この式に

$$W^{-1}=\frac{1}{G'}\left(V^{-1}-\frac{\varphi V^{-1}uu'V^{-1}}{1+\varphi u'V^{-1}u}\right)$$

を代入すると

$$\lambda\left(V^{-1}-\frac{V^{-1}uu'V^{-1}}{u'V^{-1}u}\right)=\lambda B_1$$

（証明終り）

λB_2 も λB_1 と同じく効用関数の変換に関して不変であるが，$\lambda^2(\phi+B_3)$ は不変でない．これは $\rho=G'\lambda$ より次の関係が得られることから明らかである．

$$\frac{\partial p}{\partial m}=G'\frac{\partial\lambda}{\partial m}+\lambda^2G''$$

性質 1 を使って各財の価格弾力性の間の関係が導出される．

$$p'B_1=0 \quad \text{より} \quad p'\frac{\partial x}{\partial p}=-x'$$

$$B_1p=0 \quad \text{より} \quad \frac{\partial x}{\partial p}p=-m\frac{\partial x}{\partial m}$$

弾力性形式で表わせば

$$(6\cdot 8)\quad \sum_{i=1}^{n}W_iE_{ij}=-W_j \quad j=1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} E_{ij} = -\eta_i \qquad i=1,2,\cdots,n$$

ただし，$E_{ij} = \dfrac{\partial(\log x_i)}{\partial(\log p_j)} \qquad \eta_i = \dfrac{\partial(\log x_i)}{\partial(\log m)} \qquad W_i = p_i x_i / m$

ところで (6・4) を使って (6・5) を書き改めると

$$(6 \cdot 9) \quad \frac{\partial x}{\partial p} = \lambda V^{-1} - \left(\frac{\partial x}{\partial m}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial m}\right)\left(\frac{u'V^{-1}u}{\lambda}\right) - \frac{\partial x}{\partial m} x'$$

従って

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \lambda v^{ij} - \frac{\partial x_i}{\partial m}\frac{\partial x_j}{\partial m}\left(\frac{u'V^{-1}u}{\lambda}\right) - \frac{\partial x_i}{\partial m} x_j$$

ただし，$V^{-1} = [v^{ij}]$

弾力性形式で表わすと

$$(6 \cdot 10) \quad E_{ij} = \frac{\lambda v^{ij} p_j}{x_i} - W_j \eta_j \eta_j \varphi - \eta_i W_j \qquad \text{ただし，} \varphi \equiv u'V^{-1}u / \lambda m$$

(6・4) によって φ を次のように表わせる.

$$(6 \cdot 11) \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda v^{ij} p_j}{x_i} = \eta_i \varphi \qquad i=1,2,\cdots,n$$

各財の需要関数を

$$d(\log x_i) = \sum_{j=1}^{n} E_{ij} d\,(\log p_j) + \eta_i d(\log m) \qquad i=1,2,\cdots,m$$

と表わして(6・10)，(6・11)を用いて変形すると

$$(6\cdot12)\quad d(\log x_i)=\eta_i\{d(\log m)-\sum_{k=1}^{n}W_k d(\log p_k)\}+\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}\{d(\log p_j)-\sum_{k=1}^{n}W_k{}^* d(\log p_k)\}$$

$$(6\cdot13)\quad \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}=\eta_i\varphi$$

ただし，$\varepsilon_{ij}=\dfrac{\lambda v^{ij}p_j}{x_i}$　　$W_k{}^*=\dfrac{\partial(p_k x_k)}{\partial m}$

しばしば，ヘシアン U^{**} は negative definite と前提されるが，この場合には(6・3)における V が U^{**} で置換されて

$$\frac{\partial\lambda}{\partial m}=-\lambda^2\left(\phi-\frac{1}{u'V^{-1}u}\right)\quad=\lambda^2/u'U^{**-1}u<0$$

が成り立つ．従って φ は次のような表現をとる．

$$\varphi=\frac{u'V^{-1}u}{\lambda m}=\lambda/m\left(\frac{\partial\lambda}{\partial m}\right)=1/\frac{\partial(\log\lambda)}{\partial(\log m)}\quad\text{(money incomeflexibility)}$$

他方 U^{**} が特異の場合には

$$\frac{\partial\lambda}{\partial m}=0,\quad \varphi=1/\phi\lambda m$$

$\phi(<0)$ は任意常数であるから，ε_{ij} に関する制約式 (6・13) における φ の定め方は自由である．

参考文献

〔1〕 Allen, R. G. D., *Mathematical Analysis for Economist*, Macmillan, 1949, pp. 505～508.

〔2〕 Barten, A. P., T. Kloek and F. B. Lempers, "On a class of Utility and Productions yielding Everywhere Differentiable Demand Function," *Review of Economic Studies*, 36 (1969), pp. 109～111.

〔3〕 Bellman, R., *Introduction to Matrix Analysis*, Mcgraw-Hill, 1960, p. 75.

〔4〕 Dhrymes, P. J., "On a Class of Utility and Production Functions yielding Everywhere Differentiable Demand Functin," *Review of Economic Studies*, 34 (1967), pp. 399～408.

〔5〕 Dhrymes, P. J., *Econometrics: Statistical Foundations and Applications*, Harper & Row, 1970, p. 582.

〔6〕 Theil, H., *Economics and Information Theory*, North-Holland, 1967, pp. 306～315.

〔7〕 Theil, H., and C. B. Tilanus, "The Demand for Production Factors and the Price sensitivity of Input-output predictions", *International Economic Review*, Vol. 5, No. 3, pp. 258～273.

（研　究　員）