行動方程式の誤差項の特定化について

三枝義清

要　約
数学的解説
1　H. Theil の政策決定問題
2　利潤関数について
3　最適化における一階の条件の修正
4　制約条件が課せられた場合
5　比較静学分析による誤差項の意味づけ
6　実例（Houthakker-Taylor model）

要　約

経済モデルに現われる行動方程式の誤差項を意味づけたり、あるいは統計的に特定化するのにH. Theil の政策決定モデルが有力な手掛かりを与える。たとえば需要分析の現況を眺めてみると、需要方程式体系を構成する確定項と誤差項の扱い方の間に大きな差がみられる。確定項は消費者需要理論に従って定式化されるのに対して、誤差項は主にその統計的側面に関心がもたれ、確定項のように誤差項をモデル化しようとする試みが殆ど見当たらない。誤差項は異質なもろもろの要因の合成物だから、すべての要因を考慮するのは困難であるが、しかし出来る限り誤差項も（需要体系の場合でいえば）消費者行動の経済理論に関連づけて特定化されることが望ましい。現在の需要分析では需要方程式を特定化するには、効用関数の最大化という前提のもとで需要方程式の確定部分を定式化する

のが原則的な方法である。

この方法を延長してゆくと、各財の購入量の Randomness を考慮した、ある適当な目的関数を想定し、その最適化により購入量の確率分布を導けば誤差項の特徴づけがえられるはずである。

Theil の提唱する決定モデルはこのような要請に対する一つの回答であるとみられる。

この論文では、行動方程式に含まれる誤差項の二次の積率行列(V)を Theil のモデルに従って導出し、その性質をいろいろの観点から考察したものである。

ここで対象にする行動方程式はすべてある目的関数を最適化するという行動基準に従って導出されるものに限られる。従って、たとえば効用関数をもたぬような需要方程式系は考慮外である。

第一節は Theil の決定問題とその解法――決定すべき変数が束縛条件をもたぬ場合――の紹介である。応用例として生産関数分析における要素需要関数を考察する。要素需要関数が利潤最大のもとで導かれたとすると、誤差項の二次積率行列(V)は生産関数と共役的関係にある利潤関数によって決定されることが判かる(第二節)。

第四節で決定すべき変数に制約条件が課せられた場合を扱う。四・一節で制約式が線型の場合、四・二節で非線型の場合と、それぞれの場合について誤差項のVを導出する。四節で導いたVの意味づけを容易にするために、第五節において最適値の比較静学分析を行なう。制約式が唯一の場合には Kalman and Intriligator によって導入された〃一般化された代替項〃を使うと、誤差項のVは主に代替項に依存するという結論がえられる。効用関数が価格を含まぬならば需要関数体系の誤差項のVは代替項に-1を乗じたものに正比例することになる。六節ではこの比例関係を Houthakker と Taylor により四ヵ国について推定された需要体系を使って検証している。誤差項

のVと代替項との関係を確認するには数多くの実際例と照合せねばならぬが、六節の図でみる限り Theil のモデルに従って導かれた比例関係は現実性をもつものと思われる。

数学的解説

1 H. Theil の政策決定問題

ここで対象にする行動方程式は需要関数，供給関数など経済モデルに現われる方程式を指しているが，数量分析においては，これらの方程式は誤差項を含んだ確率方程式として定式化される．消費者の需要分析を例にとると；t 期の財（i）の需要量（x_{it}）は理論値（$\bar{x}_{it}$）のまわりを，ある分散をもって変動する確率変数としてモデル化される．理論値は需要関数として所得・価格の関数で表現され，理論値からの乖離（$x_{it}-\bar{x}_{it}$）を x_{it} の誤差項また残差項と呼んでいる．需要関数は原則として与えられた予算のもとで効用関数を最大化した結果から，誘導されるものである．たとえば効用関数 $u(x_1,\cdots,x_n)$ を

$$u(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\log(x_i-k_i)$$

予算式…$\sum_{i=1}^{n}p_ix_i=m$

とおけば次のような線型の需要方程式体系がえられる．

$$p_i\bar{x}_i=p_ik_i+\beta_i(m-\sum_{i=1}^{n}p_i\bar{x}_i)\qquad i=1,2,\cdots,n$$

特に効用関数の型を指定をしなくても，需要理論によれば需要関数 $\bar{x}_i$ について詳しい特徴づけをすることが出来る．これに対して誤差項を特定化しようとする試みは Allen and Bowley にまで遡ることが出来るが，それ以降の研究は数少なく Barten〔1〕, Theil and Neudecker〔6〕, Theil〔4〕,〔5〕の諸研究がみられるだけである．誤差項を発生する源泉としては，(イ)関数型の定式化の誤り，(ロ)たとえば需要量の実現値を決定する要因は所得・価格等の主要因以外に無数に存在するにもかかわらず〔その他要因〕を無視したことから発生する誤り，(ハ)観測上の誤差，……多種多様のものがあげられる．源泉が異なればそれに応じた扱い方をせねばならないが，(ロ)の型の誤差に関しては以下紹介する Theil〔4〕によるモデル化が説得力をもつものと思われる．

Theil のモデルでは次のような決定問題が基礎になる．自由に決定できる n 個の変数の組を $x=(x_1,\cdots,x_n)'$ とおく．x が実現するまでには無数の要因が関与するものとする．x が決定される過程を計画段階，実行段階の2段階に区別する．計画段階で考慮される主要因が $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)'$ と定められた時，目的関数 $f(x,\alpha)$ を最大にするように x の値 $\bar{x}=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)$ が定められたものとしよう．$\bar{x}$ が唯一に決まるように目的関数 f のヘシアンは negative definite matrix であるとする．$\bar{x}$ を x の理論値とよぶことにする．x の実現値は主要因以外の〔その他要因〕の出かたに左右されるから，x は理論値 $\bar{x}$ から乖離するであろう．この乖離 $(x-\bar{x})$ を誤差項とよび，ある確率分布に従う確率変数とみなす．消費者需要の場合でいうと，この誤差項は所得・価格以外の〔その他要因〕に対処してなされる消費者の自由な選択の結果であるとみなされる．

x の実現値が $\bar{x}$ より乖離すればそれだけ目的関数の値は当然減少するが，この損失 $f(\bar{x})-f(x)$ を次のような2次形式で近似する，

$$(1)\qquad -\frac{1}{2}(x-\bar{x})'A(x-\bar{x})\fallingdotseq f(\bar{x})-f(x)$$

ただし，$A=\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{x=\bar{x}}\quad i,j=1,2,\cdots,n$

実現値xによってもたらされる損失を(1)で評価したとすれば，その期待損失（L）は次の(2)で表わされる

$$(2)\qquad L=-\frac{1}{2}E(x-\bar{x})'A(x-\bar{x})\geq 0$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\{-AE(x-\bar{x})(x-\bar{x})'\}$$

ただし，tr{·}は行列{ }のtrace.

(2)に見るように期待損失Lは理論値$\bar{x}$のまわりのxの2次の積率行列によって左右される．期待損失だけを考えれば$x=\bar{x}$とxを束縛すべきであるが，それでは実行段階で〔その他要因〕に対応する余地が失われてしまう．実行段階での行動の自由度を増すためにはxのバラツキが大きい方が望ましい．Theil はこのバラツキを測る尺度として，xの一般化された分散の他に多次元分布の entropy を使っているが，ここでは前者の尺度を採用することにする．

そうすると，Theil の決定問題はxの分布の選択問題に他ならないが，次のような最大問題として定式化できる．

最大問題

目的関数$=\phi(L,|V|)$

ただし，$\phi(\cdot,\cdot)$ は L については減少，$|V|$ については増加関数.

$L=(2)$ で与えられる期待損失

$V=E(x-\dot{x})(x-\dot{x})'$　　$\dot{x}=E(x)$

$|V|=V$ の行列式の値（つまり，xの一般化された分散）.

$\phi(\cdot,\cdot)$ を最大にするようにVを決定する問題であるが，この最大問題の解は(3)で与えられる.

（3）　$\dot{x}=\bar{x}$　　$V\propto -A^{-1}$

証明

Lを書き改めて

$$L=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(-AV)-\frac{1}{2}(\dot{x}-\bar{x})'A(\dot{x}-\bar{x})$$

右辺の第2項は負だから，$\dot{x}=\bar{x}$ とおくべきである．従ってVの最適値を求めるには

（4）　$$\frac{\partial\phi}{\partial v_{ij}}=\frac{\partial\phi}{\partial L}\cdot\frac{\partial L}{\partial v_{ij}}+\frac{\partial\phi}{\partial|V|}\cdot\frac{\partial|V|}{\partial v_{ij}}=0 \quad i,j=1,2,\cdots,n$$

ただし，$V=[v_{ij}]$

$$L=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(-AV)$$

を解けばよい．

$$\frac{\partial|V|}{\partial v_{ij}}=V_{ij}=v_{ij} \text{ の cofactor}$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial v_{ij}}\right]=\frac{1}{2}(-A)$$

これらを(4)に代入すると

$$\lambda[V_{ij}]=-\frac{A}{2}$$

$$ただし,\quad \lambda=-\frac{\partial\phi}{\partial L}\Big/\frac{\partial\phi}{\partial|V|}$$

$$L=\lambda|V|n$$

従って L または $|V|$ のいずれかを任意に選ぶことが出来るが，$L=L_0$ に定めたとすれば

$$V=\frac{2L_0}{n}(-A^{-1})\propto -A^{-1}$$

が求むる最適解になる．（証明終り）

Theil〔4〕によると $|V|$ の代わりに entropy（H）を使った場合には，$-\infty<x_i<\infty\quad i=1,2,\cdots,n$ とすれば $\phi(L,H)$ を最大にする x の確率分布は n 次元の正規分布で与えられることが証明されている．

最初に述べたように需要関数や供給関数などの行動方程式はある目的関数を最適化した結果から誘導されるものであるが，それらは理論値 $\bar{x}$ の決定に関するものである．もし我々が行動方程式の decision variable x の分布はいま紹介した決定モデルに従って確定されるという想定を正しいものとして受容することにすれば，行動方程式における誤差項 $x-\bar{x}$ の２次の積率行列は(3)式に従って特徴づけられ，誤差項の２次のモーメントに対して明確な経済的意味を与えることが可能になる．

2　利潤関数について

目的関数が特に(4)で表わされたものとしよう

$$(4)\qquad f(x_1,\cdots,x_n)-\sum_{i=1}^{n}c_ix_i\equiv\Pi(x,c)$$

$f(\cdot)$を生産関数，c_i を input (i) の基準化された価格とすると，Π は output の価格を単位にしたときの利潤を表わしている．$f(\cdot)$ は2回連続微分可能で，ヘシアンは negative definite であるとする．利潤最大のもとでそれぞれの input の要素需要関数 $\bar{x}_i$ が導かれたものとすると，要素需要関数の誤差項の2次のモーメントは前節の(3)を用いて特定化されるが，目的関数が(4)で表現されている場合には誤差項の2次モーメントの意味をより明確に規定することが出来る．

Πを最大にするxの理論値を $\bar{x}$ とすると

$$(5)\qquad c_i=\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x=\bar{x}}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

$\bar{x}_i$ は $c_1,\cdots,c_n$ の関数として一意に表わせる．

$$\bar{x}_i=h_i(c_1,\cdots,c_n)\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

上述の関数 $\bar{x}_i$ を使って次のような関数 Π^* を定義する．

$$(6)\qquad \Pi^*(c_1,\cdots,c_n)\equiv f(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)-\sum_{i=1}^{n}c_i\bar{x}_i$$

$f(\cdot)$ が生産関数の時には，$\bar{x}_i$ は要素需要関数であるから，$\Pi^*(\cdot)$ は利潤関数 (unit profit function) になる．と

ころで，$(-)\Pi^*$ は (5),(6) によって $f(\cdot)$ をルジャンドル変換[1] (Legendre transformation) した時の双対的な関数になっている．ルジャンドル変換の性質から次の関係が直ちにえられる．

$$(7)\qquad \frac{\partial \Pi^*}{\partial c_i}=-\bar{x}_i \qquad i=1,2,\cdots,n$$

および

$$(8)\qquad \left[\frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial c_i \partial c_j}\right]=-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]^{-1}_{x_i=\bar{x}_i}$$

従って $\bar{x}_i=h_i(c_1,\cdots,c_n)\quad i=1,2,\cdots,n$ に加法的に付加される誤差項の２次の積率行列 V は

$$(9)\qquad V=\text{const.}\times\left[\frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial c_i \partial c_j}\right]$$

$f(\cdot)$ が生産関数とすると，利潤関数 Π^* は (7) と (8) にみるように要素需要関数について充分な情報を与えることが判かる．利潤関数を c_i で偏微分して，input (i) の理論値が，２回偏微分することにより誤差項の２次のモーメント（比例常数を除いて）が導けるわけである．

参考までに代表的な生産関数の利潤関数を掲げておく．

例 1. cobb-Douglas 型

$$f(x_1,x_2)=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \qquad \alpha_1>0 \quad \alpha_2>0 \text{ 且つ } \alpha_1+\alpha_2<1$$

とすると

$$\Pi^*=(1-\mu)\prod_{i=1}\left(\frac{c_i}{\alpha_i}\right)^{-\alpha_i(1-\mu)^{-1}}$$

ただし，$\mu=\alpha_1+\alpha_2$

例 2. CES型

$$f(x_1,x_2)=(\alpha_1 x_1{}^{-\rho}+\alpha_2 x_2{}^{-\rho})^{-m/\rho}$$

ただし，$\alpha_1+\alpha_2=1 \quad \alpha_1>0 \quad \alpha_2>0$

$\rho>1 \quad 0<m<1$

とすると

$$\Pi^*=(1-m)\,m^{\frac{m}{1-m}}\left\{\sum_{i=1}\left(\frac{\alpha_i}{c_i}\right)^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right\}^{-\frac{m}{(1-m)}\cdot\frac{(1+\rho)}{\rho}}$$

注 1) x が1変数より成る場合で述べる．$y(x)$ は $a<x<b$ で2回連続微分可能且つ $y''(x)\neq 0$ とする．$X=y'(x)$ は (a,b) と (A,B) の間の1対1の変換になる．この場合次の変換をルジャンドル変換という．

$$X=y'(x)$$
$$Y(X)=xy'(x)-y(x)$$
$$Y'(X)=x$$

この変換は逆に解けて

$$x=Y'(X)$$
$$Y(x)=XY'(X)-Y(X)$$
$$y'(x)=X$$

がえられる．さらに2回の導関数については

$$Y''(X)=\frac{dx}{dX}=1/y''(x)\neq 0$$

が成立する.

3　最適化における1階の条件の修正

行動方程式に誤差項を導入する直接的な方法は，次のように最適化における1階の条件を修正することであろう．典型的な例は生産関数分析によくみられる．たとえば Zellner, Kmenta, and Drèze [8].

目的関数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ を最大化する場合，最適値を $\bar{x}$ とすると1階の条件は

$$f_i(\bar{x})=0 \qquad i=1,2,\cdots,n$$

$$\text{ただし，}\ \frac{\partial f}{\partial x_i}\equiv f_i(x)$$

$x \neq \bar{x}$ に対しては1階の条件は攪乱されるから攪乱項 e_i　$i=1,2,\cdots,n$ を使って1階の条件を次のように修正する.

$$f_i(x)=e_i \qquad i=1,2,\cdots,n$$

$$\text{ただし，}\ E(e_i)=0$$

攪乱項 e_i を確率変数とみなし，上述の方程式を解いて x に関する確率方程式を導くわけである.

例　$f(x)=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}-\sum_{i=1} c_i x_i \quad \alpha_1>0 \quad \alpha_2>0 \quad \alpha_1+\alpha_2<1$

$y_i \equiv \log x_i$ とすると1階の条件は

$(\alpha_1-1)y_1+\alpha_2 y_2=c_1/\alpha_1$

$$\alpha_1 y_1+(\alpha_2-1)y_2=c_2/\alpha_2$$

右辺にそれぞれ誤差項 e_1, e_2 を追加してから上述の方程式を解くことにより，y_1, y_2 の行動方程式が導かれる．

ところ $\bar{x}$ での近傍にある x については

$$f_i(x)\fallingdotseq f_i(\bar{x})+\sum_{j=1}^{n}\Delta x_j f_{ij}(\bar{x})=\sum_{j=1}^{n}\Delta x_j f_{ij}(\bar{x})$$

ただし，$\Delta x_j=x_j-\bar{x}_j$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{x=\bar{x}}=f_{ij}(\bar{x}) \qquad i, j=1, 2, \cdots, n$$

従って1階の条件に追加される攪乱項 $e=(e_1, \cdots, e_n)'$ は次のような内容をもつことが判かる．近似的にだが

$$e_i=\sum_{j=1}^{n}\Delta x f_{ij}(\bar{x}) \qquad i=1, 2\cdots, n$$

行列表示すれば

(10)　$e=[f_{ij}(\bar{x})]\,\Delta x$

ただし，$\Delta x=(x_1-\bar{x}_1, \cdots, x_n-\bar{x}_n)'$

(10)によって，(2)で定義した期待損失 L を攪乱項 e をタームにして表現することが出来る．

$$\sum_{i=1}\sum_{j=1}\Delta x_i\,\Delta x_j f_{ij}(\bar{x})=e'A^{-1}e$$

ただし，$A=[f_{ij}(\bar{x})] \qquad i, j=1, 2, \cdots, n$

従って

$$L=-E(e'A^{-1}e)$$

１節で述べた決定基準に従って攪乱項 e の２次のモーメント(Ω)を定めると，つまり $\phi\ (L, |\Omega|)$ を最大にするようにΩを選ぶと，$\Omega\propto -A$ という結果がえられる．この結果が(3)の $V\propto -A^{-1}$ と同等であることは明らかであろう．

まえに対数変換する例を掲げておいたが，対数変換を施した場合の誤差項の２次のモーメントを求めておく．

$y_i=\log x_i \quad i=1,2,\cdots,n$ とおくと

$$\Delta x_i\, \Delta x_j\, f_{ij}(\bar{x})=\frac{\Delta x_i}{\bar{x}_i}\,\frac{\Delta x_j}{\bar{x}_j}\,\bar{x}_i\,\bar{x}_j\, f_{ij}(\bar{x})\fallingdotseq \Delta \log x_i\, \Delta \log x_j\, (f_{ij}(\bar{x})\,\bar{x}_i\,\bar{x}_j)$$

従って

$$f(x)-f(\bar{x})\fallingdotseq\sum_{i=1}\sum_{j=1}\Delta y_i\,\Delta y_j\,(f_{ij}(\bar{x})\,\bar{x}_i\,\bar{x}_j)$$

ただし，$\Delta y_i=\log x_i-\log \bar{x}_i=y_i-\bar{y}_i$

１節の決定基準に従えば $y_i=\log x_i$ の誤差項 $\Delta y_i \quad i=1,2,\cdots,n$ の２次の積率行列は次式で表わされることになる．

(11) $$E(\Delta y\, \Delta y')\propto -[f_{ij}(\bar{x})\,\bar{x}_i\,\bar{x}_j]^{-1}$$

ただし，$\Delta y'=(\Delta y_1,\cdots,\Delta y_n)$

$$\Delta y_i=\log x_i-\log \bar{x}_i=y_i-\bar{y}_i \qquad i=1,2,\cdots,n.$$

例　$f(x_1, x_2)=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}-\sum_{i=1}c_i x_i$

$$[f_{ij}]=x_0\begin{bmatrix}\dfrac{\alpha_1(\alpha_1-1)}{x_1{}^2} & \dfrac{\alpha_1\alpha_2}{x_1x_2}\\[2ex] \dfrac{\alpha_1\alpha_2}{x_1x_2} & \dfrac{\alpha_2(\alpha_2-1)}{x_2x^2}\end{bmatrix}\quad \text{ただし，}x_0=x_1{}^{\alpha_1}x_2{}^{\alpha_2}$$

$$[\bar{x}_i\,\bar{x}_j\,f_{ij}\,(\bar{x})]=\bar{x}_0\begin{bmatrix}\alpha_1(\alpha_1-1) & \alpha_1\alpha_2\\ \alpha_1\alpha_2 & \alpha_2(\alpha_2-1)\end{bmatrix}\quad \text{ただし，}\bar{x}_0=\bar{x}_1{}^{\alpha_1}\bar{x}_2{}^{\alpha_2}$$

$$\bar{y}_1=\{(\alpha_2-1)k_1-\alpha_2k_2\}/(1-\alpha_1-\alpha_2)$$

$$\bar{y}_2=\{-\alpha_1k_1+(\alpha_1-1)k\}/(1-\alpha_1-\alpha_2)$$

$$\text{ただし，}k_i=\log\left(\frac{c_i}{\alpha_i}\right)\quad i=1,2.$$

誤差項 $(y_1-\bar{y}_1, y_2-\bar{y}_2)$ の２次の積率行列は(11)によれば

$$E(\Delta y\,\Delta y')\propto-\{\bar{x}_0\,\alpha_1\,\alpha_2(1-\alpha_1-\alpha_2)\}^{-1}\begin{bmatrix}\alpha_2(\alpha_2-1) & -\alpha_1\alpha_2\\ -\alpha_1\alpha_2 & \alpha_1(\alpha_1-1)\end{bmatrix}$$

4　制約条件が課せられた場合

１節で述べた決定問題を拡張して，決定すべき変数に制約条件が課せられた場合を考察する．

目的関数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ を最大化するに当たって，$x=(x_1,\cdots,x_n)'$ にいくつかの制約条件が課せられた場合 x の分布がどうなるか，という問題である．

この場合でも以下に示すように (3) と類似した諸公式が導かれる．それらの公式は需要関数や供給関数における誤差項の２次のモーメントを特徴づけるのに利用することが出来る．

4.1.　まず制約条件が次のような m 個の線型式で与えられる場合を検討する．

目的関数… $f(x_1, \cdots, x_n)$

線型の制約条件… $Dx=b$

ただし，$b=(b_1, \cdots, b_m)'$

$D=m$ 行 n 列の行列で階数が m.

最適値 $\bar{x}$ が唯一通りに定まるように $f(x)$ のヘシアン A が $Dx=b$ のもとで negative definite になるものと前提する．

制約条件を使うと，n 個の変数 $x_1, \cdots, x_n$ のうちの m 個の変数を残りの $n-m$ 個の変数で表わすことができる．たとえば $x=(x_1, \cdots, x_n)$ を $x=(x_{(1)}, x_{(2)})'$ と分割して，制約式を次のように書き改めたとき部分行列 D_2 が non-singular とすると

$$[D_1, D_2]\begin{bmatrix} x_{(1)} \\ x_{(2)} \end{bmatrix} = b$$

ただし，$D_1=D$ の m 行 $n-m$ 列の部分行列

$D_2=D$ の m 行 m 列の部分行列

$x_{(1)}=n-m$ 個の変数よりなる列ベクトル

$x_{(2)}=m$ 個の変数よりなる列ベクトル

$x_{(2)}$ は次の (12) で表わされる.

(12)　$x_{(2)}=D_2^{-1}b-D_2^{-1}D_1x_{(1)}\equiv\psi(x_{(1)})$

ただし，$\psi(x_{(1)})=[\varphi_1(x_{(1)}),\cdots,\varphi_m(x_{(1)})]'$

$Dx=b$ のもとで $f(x)$ を最大にするには，$f(x_{(1)},\psi(x_{(1)}))\equiv F(x_{(1)})$ を最大にすればよい．$x_{(1)}$ は自由に選らべる $(n-m)$ 個の変数より成り立つから，1節の(3)によって，$x_{(1)}$ の2次の積率行列を導くことが出来る.

(13)　$E(x_{(1)}-\bar{x}_{(1)})(x_{(1)}-\bar{x}_{(1)})'=-kH^{-1}\equiv V_{11}\qquad k>0$

ただし，H は $F(x_{(1)})$ の $x_{(1)}=\bar{x}_{(1)}$ におけるヘシアン．前提によって，H は negative definite となる.

(12),(13)を用いて $x=(x_{(1)},x_{(2)})'$ の2次の積率行列 (V) を求める.

$$V=\begin{bmatrix}V_{11} & V_{12}\\ V_{21} & V_{22}\end{bmatrix}$$

ただし，$V_{ij}=E(x_{(i)}-\bar{x}_{(i)})(x_{(j)}-\bar{x}_{(j)})'$

$\bar{x}_{(i)}=E(x_{(i)})$

$i=1,2.$

とおくと

$$V_{11}=-kH^{-1}$$

(14) $$V_{21}=kD_2^{-1}D_1H^{-1}$$
$$V_{12}=kH^{-1}D_1'D_2'^{-1}$$
$$V_{22}=-kD_2^{-1}D_1H^{-1}D_1'D_2'^{-1}$$

ところで $F(x_{(1)})$ のヘシアン H は次のように展開できる.

(15) $$H=A-B'D_2^{-1}D_1-D_1'D_2'^{-1}B+D_1'D_2'^{-1}CD_2^{-1}D_1$$

ただし,

$$\begin{bmatrix} A & B' \\ B & C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{(1)}\partial x_{(1)}} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{(1)}\partial x_{(2)}} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{(2)}\partial x_{(1)}} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{(2)}\partial x_{(2)}} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{(1)}\partial x_{(2)}}=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\right] \qquad x_i\in x_{(2)},\ x_j\in x_{(1)}$$

一方, 分割行列の逆行列の公式を用いて次の(16)が証明される.

(16) $$\left[\begin{array}{cc:c} A & B' & D_1' \\ B & C & D_2' \\ \hdashline D_1 & D_2 & 0 \end{array}\right]^{-1}=\left[\begin{array}{c:c:c} H^{-1} & -H^{-1}D_1'D_2'^{-1} & * \\ -D_2^{-1}D_1H^{-1} & D_2^{-1}D_1H^{-1}D_1'D_2'^{-1} & \\ \hdashline * & * & * \end{array}\right]$$

ただし, * の個所にある部分行列は省略されている.

いま導いた (14), (15), (16) を用いることによって, $x=(x_1,\cdots,x_n)$ の2次の積率行列 V は次のような $f(x)$ の

縁つきヘシアン (bordered hessian) の逆行列における部分行列で与えられることが結論される.

$$(17)\quad \left[\begin{array}{c:c} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial x} & D' \\ \hdashline D & 0 \end{array}\right]^{-1}_{x=\bar{x}} = \left[\begin{array}{c:c} -V/k & * \\ \hdashline * & * \end{array}\right]$$

ただし, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial x}=\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\right]$ $i,j=1,2,\cdots,n$ $\quad k>0$

(17)の V は(14)より知れるように, singular な対称行列である.

4.2　制約条件が m 個の非線型式で与えられた場合.

(18)　制約条件　$g_i(x)=b_i$　$i=1,2,\cdots,m<n$

ただし, $x=\bar{x}$ の近傍で制約式の jocobian matrix の階数はmである. たとえば $x=(x_{(1)},x_{(2)})'$ と分割した時 m 行 m 列の行列 $\dfrac{\partial g}{\partial x_{(2)}}$ は non-singular であるとする.

$$(19)\quad \left[\begin{array}{ccc:c} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_{n-m}} & \cdots \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_{n-m}} & \cdots \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} \dfrac{\partial g}{\partial x_{(1)}} & \dfrac{\partial g}{\partial x_{(2)}} \end{array}\right]$$

ただし, $x_{(1)}=(x_1,\cdots,x_{n-m})'$

$x_{(2)}=(x_{n-m+1},\cdots,x_n)'$

(18)の制約式を使って, $x_{(2)}$ を $x_{(1)}$ の関数として表わせる.

$$x_{(2)}=\psi(x_{(1)})=[\varphi_1(x_{(1)}),\cdots,\varphi_m(x_{(1)})]'$$

$g_i(x)=b_i \quad i=1,2,\cdots m$ のもとで $f(x)$ を最大にするには $f(x_{(1)},x_{(2)})\equiv F(x_{(1)})$ を最大にすればよい．1節の(3)を使って $x_{(1)}$ の2次の積率行列を導く．

$$E(x_{(1)}-\bar{x}_{(1)})(x_{(1)}-\bar{x}_{(1)})'\equiv V_{11}=-kH^{-1} \qquad k>0 \tag{20}$$

ただし，H は $F(x_{(1)})$ の $x_{(1)}=\bar{x}_{(1)}$ におけるヘシアン．

次の(21)を用いて $x=(x_{(1)},x_{(2)})'$ の2次の積率行列を近似的に評価する．

$$x_{(2)}-\bar{x}_{(2)}\fallingdotseq\frac{\partial\psi}{\partial x_{(1)}}(x_{(1)}-\bar{x}_{(1)}) \tag{21}$$

ただし，$\dfrac{\partial\psi}{\partial x_{(1)}}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_{(1)}}\\ \vdots \\ \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_{(1)}}\end{bmatrix}$

$$\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_{(1)}}=\left[\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_1},\cdots\cdots,\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_{n-m}}\right] \qquad j=1,\cdots,m$$

(21)の $\dfrac{\partial\psi}{\partial x_{(1)}}$ は

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_{(1)}}=-\left(\frac{\partial g}{\partial x_{(2)}}\right)^{-1}\frac{\partial g}{\partial x_{(1)}}$$

と表わせるから，ここで

$$\frac{\partial g}{\partial x_{(1)}}\equiv D_1,\quad \frac{\partial g}{\partial x_{(2)}}\equiv D_2$$

ただし，D_1, D_2 は $x=\bar{x}$ で評価されている.

とおくと，$x=(x_{(1)}, x_{(2)})'$ の２次の積率行列 V は近似的に(14)式によって評価できる.

$$(22)\qquad V=\begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}$$

ただし，V_{ij} はいずれも(14)によって与えられる部分行列である.

次ぎに $x_{(1)}=\bar{x}_{(2)}$ における $F(x_{(1)})$ のヘシアンHを求めると，

$$(23)\qquad H=A-B'D_2^{-1}D_1-D_1'D_2'^{-1}B+D_1'D_2'^{-1}CD_2^{-1}D_1$$

ただし，

$$\begin{bmatrix} A & B' \\ B & C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{(1)}\partial x_{(1)}} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{(1)}\partial x_{(2)}} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{(2)}\partial x_{(1)}} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{(2)}\partial x_{(2)}} \end{bmatrix}-\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 g_j}{\partial x_{(1)}\partial x_{(1)}} & \dfrac{\partial^2 g_j}{\partial x_{(1)}\partial x_{(2)}} \\ \dfrac{\partial^2 g_j}{\partial x_{(2)}\partial x_{(1)}} & \dfrac{\partial^2 g_j}{\partial x_{(2)}\partial x_{(2)}} \end{bmatrix}$$

$$\lambda'=(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)=\frac{\partial f}{\partial x_{(2)}}\left(\frac{\partial g}{\partial x_{(2)}}\right)^{-1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_{(1)}\partial x_{(2)}}=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right]\qquad x_i\in x_{(2)},\ x_j\in x_{(1)}$$

なお，

$$(24)\qquad \begin{bmatrix} A & B' \\ B & C \end{bmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial x} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial^2 g_j}{\partial x\, \partial x} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial x\, \partial x}$$

とも表わせる.

続いての展開は4.1の線型の制約条件の場合と同じである.(16)を利用して(22),(23)をまとめると次式を導くことが出来る.

$$(25)\qquad \left[\begin{array}{c:c} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x\, \partial x} & \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)' \\ \hdashline \dfrac{\partial g}{\partial x} & 0 \end{array}\right]^{-1}_{x=\bar{x}} = \left[\begin{array}{c:c} -V/k & * \\ \hdashline * & * \end{array}\right]$$

ただし,$\dfrac{g^2 L}{\partial x\, \partial x}$ は(24)で定義されている行列

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right] \quad \begin{array}{l} i=1,2,\cdots,m \\ j=1,2,\cdots,n \end{array}$$

＊ の個所の部分行列は省略されている.

線型の制約条件の場合と同じく,$x=(x_1,\cdots,x_n)$ の2次の積率行列(V)は近似的であるが $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x\, \partial x}$ の縁つき行列の逆行列における部分行列によって与えられることが判かる.

5　比較静学分析による誤差項の意味づけ

前節において決定すべき変数に制約条件が課せられたときの誤差項の2次のモーメントを評価する公式 (17), (25)を導いたが，このままではこれらの公式は形式的すぎて誤差項の経済的意味を知るのに不便である．そこで誤差項の意味を明らかにする手掛かりとして次のような比較静学分析を利用する．

5.1　比較静学分析

目的関数 $f(x)$ と制約式 $g(x)$ が shift parametre (a) を含むものとして，$g(x,a)=b$ のもとで $f(x,a)$ を最大化する問題を考えてみる．

$$b-g(x,a)\equiv\psi(x,\alpha)=[\varphi_1(x,\alpha),\cdots,\varphi_m(x,\alpha)]$$

$\alpha'=(a',b')$，α は $q+m$ 個のパラメータから成る列ベクトル．

とおいて $\psi(x,\alpha)=0$ のもとで $f(x,\alpha)$ を最大化する問題に書き改める．ある特定なパラメータ $\alpha=\overline{\alpha}$ について最大化問題が解けたものとしよう．

Lagragian を $L(x,\lambda,\alpha)$ とおく．

$$L(x,\lambda,\alpha)=f(x,\alpha)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\varphi_j(x,\alpha)$$

1階の条件は局所的な最適値を $\bar{x}$, $\bar{\lambda}$ とすると

$$\text{(26)}\qquad \frac{\partial L}{\partial x_i}(\bar{x},\bar{\lambda},\overline{\alpha})=0\qquad i=1,2,\cdots,n$$

$$\varphi_j(\bar{x},\overline{\alpha})=0\qquad j=1,2,\cdots,m$$

(26) より，次のような比較静学分析のための基本式が導かれる．その詳細については Takayama〔7, pp. 152-156〕を参照されたい．

$\bar{\alpha}$ の近傍にあるすべての $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{q+m})'$ について

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x(\alpha)}{\partial \alpha_k} \\ \dfrac{\partial \lambda(\alpha)}{\partial \alpha_k} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} L_{xx} & \psi'_x \\ \psi_x & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L_{x\alpha_k} \\ \psi_{\alpha_k} \end{bmatrix} \qquad k=1,2,\cdots,q+m. \tag{27}$$

ただし，

$$L_{xx}=\left[\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\,\partial x_j}\right] \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_i\,\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{l=1}^{m}\lambda_l\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i\,\partial x_j} \qquad i,j=1,2,\cdots,n$$

$$L_{x\alpha_k}=\left[\frac{\partial^2 L}{\partial x_i\,\partial \alpha_k}\right] \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x_i\,\partial \alpha_k}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial \alpha_k}+\sum_{l=1}^{m}\lambda_l\frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i\,\partial \alpha_k} \qquad i=1,2,\cdots,n$$

$$\psi'_x=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}\cdots\dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$\psi_{\alpha_k}=\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_k}\cdots\frac{\partial \varphi_m}{\partial \alpha_k}\right]'$$

なお，(27)は次の前提のもとで導かれたものである．

前提　1. f および φ_j　$j=1,\cdots,m$ は (x,α) について2回連続微分可能である．

前提　2. ϕ_x の階数は m.

前提　3. $(\bar{x}, \psi, \bar{\alpha})$ において $\det\begin{bmatrix} L_{xx} & \phi_x' \\ \phi_x & 0 \end{bmatrix} \neq 0$

(27)の左辺はそれぞれ $(n+m)$ 次の列ベクトルであるが，それらをまとめると(27)は次のような行列方程式で表示できる.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial \alpha} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} L_{xx} & \phi_x' \\ \phi_x & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L_{x\alpha} \\ \phi_\alpha \end{bmatrix} \tag{28}$$

ただし，

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \left[\frac{\partial x(\alpha)}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial x(\alpha)}{\partial \alpha_k} \cdots\right]$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} = \left[\frac{\partial \lambda(\alpha)}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial \lambda(\alpha)}{\partial \alpha_k} \cdots\right]$$

$$\phi_\alpha = [\phi_{\alpha_1} \cdots \phi_{\alpha k} \cdots]$$

$$L_{x\alpha} = [L_{x\alpha_1} \cdots L_{x\alpha_k} \cdots]$$

$$k = 1, 2, \cdots, 2q+m$$

(28) に $\phi(x, \alpha) = b - g(x, \alpha)$ を代入して書き改めると，

$$(29)\qquad \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} \\[2ex] \dfrac{\partial \lambda}{\partial \alpha} \end{bmatrix} = -\left[\begin{array}{c:c} L_{xx} & -g_x{}' \\ \hdashline -g_x & 0 \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c:c} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial a} & 0_{nm} \\ \hdashline -\dfrac{\partial g}{\partial a} & I_{mm} \end{array}\right]$$

ただし, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial a} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial a} - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \dfrac{\partial^2 g_l}{\partial x\,\partial a}$

$\dfrac{\partial g}{\partial a} = \left[\dfrac{\partial g_i}{\partial a_j}\right] \qquad i=1,\cdots,m$

$j=1,\cdots,q$

$0_{nm}=n$ 行 m 列のゼロ行列

$I_{mm}=m$ 行 m 列の恒等行列

(29)において

$$(30)\qquad \left[\begin{array}{c:c} L_{xx} & -g_x{}' \\ \hdashline -g_x & 0 \end{array}\right]^{-1} \equiv \left[\begin{array}{c:c} K_1 & K_2 \\ \hdashline K_3 & K_4 \end{array}\right]$$

とおくと

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \left[\begin{array}{c:c} \dfrac{\partial x}{\partial a} & \dfrac{\partial x}{\partial b} \end{array}\right] = -\left[\begin{array}{c:c} K_1 \dfrac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial a} - K_2 \dfrac{\partial g}{\partial a} & K_2 \end{array}\right]$$

従って次式がえられる.

$$(31)\qquad \frac{\partial x}{\partial a} = K_2 \frac{\partial g}{\partial a} - K_1 \frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial a} \qquad \frac{\partial x}{\partial b} = -K_2$$

あるいは

$$\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial g}{\partial a}=-K_1\frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial a} \tag{32}$$

比較静学分析によって導いた(32)式によって誤差項の意味づけを容易にすることが出来る．前出の(30)から

$$\begin{bmatrix} L_{xx} & g_x' \\ g_x & 0 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} K_1 & -K_2 \\ -K_3 & K_4 \end{bmatrix}$$

がえられるが，4節の(25)によれば $K_1=-V/k$ と表わせるからである．前提1～3のもとでは K_1 は negative semi-definite の対称行列になる（Takayama〔7, p. 156〕).

5.2　一般化された Slutsky equation（制約式が1個の場合）

5.1 節では制約条件が m 個の制約式で成り立っていたが，興味深いのは制約式が1個の場合である．この場合には誤差項の2次の積率行列（V）を Kalman and Intriligator〔3〕によって導入された“代替項”の概念に関連づけることができる．

a_j の微小変化（a のその他のパラメータは一定として）が最適値 x に与える効果を考える場合，目的関数 $f(x, a)$ を一定に保つような調整的変化が b に生じたものとしよう．このような a_j における補償された変化(compensated change）に対する x_i の微小変化率を $\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial a_j}\right)_{\text{comp.}}$ と記すことにする．

$f(x,a)=\text{const.}$ と1階の条件とから

$$\lambda\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial a}da=0$$

$g(x, a)=b$ より

$$\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial a}da=0$$

従って,

$$(33) \qquad \frac{\partial g}{\partial a}da-db=\frac{1}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial a}da$$

一方

$$(34) \qquad dx=\frac{\partial x}{\partial a}da+\frac{\partial x}{\partial b}db$$

(33) と (34) から $\left(\frac{\partial x_i}{\partial a_j}\right)_{\text{comp.}}$ がえられる.

$$(35) \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_{\text{comp.}}=\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial x}{\partial b}\left(\frac{\partial g}{\partial a}-\frac{1}{\lambda}\frac{\partial f}{\partial a}\right)$$

ただし, $\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_{\text{comp.}}=\left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial a_j}\right)_{\text{comp.}}\right] \quad \begin{array}{l} i=1, 2, \cdots, n \\ j=1, 2, \cdots, q \end{array}$

(35)を書き改めると

$$(36) \qquad \frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial g}{\partial a}=\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_{\text{comp.}}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial f}{\partial a}$$

Kalman and Intrigator〔3〕は (36) を一般化された Slusky equation と称し, その右辺を“代替項”とよん

でいる．代替項を $S(a,b)$ で表わすことにする．

ところで前出の(32)によれば

$$\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial x}{\partial b}\,\frac{\partial g}{\partial a}=-K_1\frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial a}=\frac{V}{k}\,\frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial a}\qquad k>0$$

(36)と比較することにより V を次のように代替項と関係づけることができる．

$$(37)\qquad S(a,b)=\frac{V}{k}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial a}\right)\qquad k>0$$

例 1

古典的需要理論では予算制約式 $p'x=m$ のもとで効用関数 $f(x)$ を最大化することにより需要関数 $x(p,m)$ が導かれるが，(37)によって誤差項の２次の積率行列を評価してみる．

$a\equiv p$, $b=m$, $g\equiv p'x$ だから，(36) より周知の slutsky equation がえられる．

$$\frac{\partial x}{\partial p}+\left(\frac{\partial x}{\partial m}\right)x'=S(p,m)\cdots\text{slutsky equation}$$

代替項 $S(p,m)$ は

$$S(p,m)\equiv\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)_{\text{comp.}}+\frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial x}{\partial m}\,\frac{\partial f}{\partial p}=\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)_{\text{comp.}}$$

lagragian (L) は $L=f(x)+\lambda(m-p'x)$ だから

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_j\,\partial p_i}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial p_i}-\lambda\,\frac{\partial^2(p'x)}{\partial x_j\,\partial p_i}=\begin{cases}-\lambda & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

すなわち

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial p}=-\lambda I_{nn}$$

ただし，I_{nn} は n 列 n 行の恒等行列

従って

$$V=-\frac{k}{\lambda}S(p,m)=-\frac{k}{\lambda}\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)_{\text{comp.}}\quad k>0 \tag{38}$$

(38)では限界効用が正（$\lambda>0$）であることが前提されている．(38)によれば，需要関数における誤差項の2次の積率行列 V は代替項の符号を変えた行列，すなわち $-\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)_{\text{comp.}}$ に正比例することが結論される．

例2

単一の input (z) より生産しうる n 種類の output の集まりが $g(x_1,\cdots,x_n)=z$ で表わされたとする．input＝一定のもとで産出額 $p'x$ を最大化する問題を考えてみる．この結果えられる供給関数 $x(p,z)$ の誤差項の2次の積率を検討してみる．

(36)による Slutsky equation は $\frac{\partial g}{\partial p}=0$ だから

$$\frac{\partial x}{\partial p}=S(p,z)$$

$L=p'x+\lambda(z-g(x))$ より

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial p} = I_{nn}$$

従って

(39) $$V = kS(p, z) = k\frac{\partial x}{\partial p} \qquad k>0.$$

6　実例（Houthakker-Taylor model）

誤差項の２次の積率行列が代替項に依存するという結論(37)は１節で述べた規範的なモデルのもとで導かれたものであるから，(37)の関係が実際にどの程度現実性をもつものであるかは経験的に確かめてみなければ判からない．

これまでに需要関数体系の計測が数多く発表されているが，誤差項の分散や共分散に触れたものは意外に少ないここでは Houfhakker and Taylor（以下 HT と略称）の行なった需要体系の計測結果〔2〕を利用して，２次の積率と代替項の間の関係を検討してみることにする．

HTは次の効用関数を最大にすることにより“ダイナミック”な需要方程式体系を導いている(〔2〕の第５章)

(40) $$f(x, s) = x'a + s'b + \frac{1}{2}x'Ax + x'Bs + \frac{1}{2}s'Cs$$

ただし，x と s は n 次の列ベクトル．

x は各財の購入量から，s は“状態変数”から成り立っている．

a, b はコンスタントな列ベクトル.

A, B と C はコンスタントな対角行列で non-singular.

特に $A=[a_{ii}] \quad a_{ii}<0 \quad i=1,2,\cdots,n$

状態変数 $s=(s_1,\cdots,s_n)'$ は耐久財のストックとか習慣を表わす変数である．従って Bs によって習慣（あるいはストックの）形成が限界効用に及ぼす影響が表わされる．A と B が対角行列であるので（40）の効用関数は加法的である．

s は観測不能な変数であるが，s と x の間には次の関係が仮定されている．

(41) $$\frac{ds}{dt}=x-Ds$$

ただし，t は時間を表わす変数で，D は non-singular な対角行列.

予算制約式 $p'x=m$ のもとで(40)を最大化することにより

(42) $$\bar{x}=A^{-1}(\lambda p-a-Bs)$$

(42)の需要体系は s を含んでいるので直接推定できない．HT は(41)を利用して(42)の右辺の s を除外することにより（その他いろいろの技巧を施して）$\bar{x}$ の推定式を誘導している．

4節の(17)によって，(42)に追加される誤差項の2次の積率を求めてみる．状態変数 s を p，m と同じく所与のパラメータに扱って

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial x}\equiv A,\ D\equiv p'$$

従って

$$(43)\qquad -\frac{V}{k}=A^{-1}-(p'A^{-1}p)^{-1}A^{-1}pp'A^{-1}\qquad k>0$$

一方(37)に$\dfrac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial p}=-\lambda I_{nn}$ を代入して

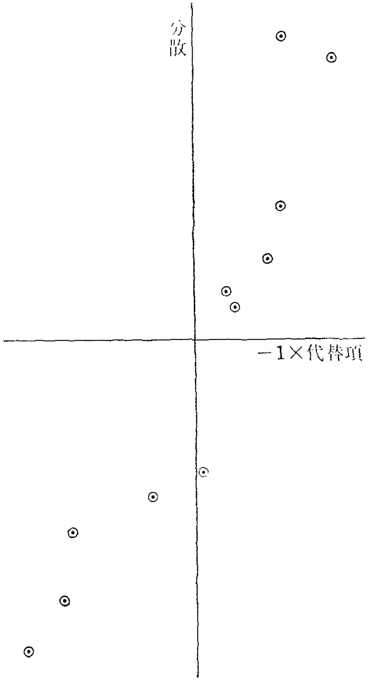
$$(44)\qquad S(p,m)=-\lambda V/k=\lambda A^{-1}-\lambda(p'A^{-1}p)^{-1}A^{-1}pp'A^{-1}$$

(44)の代替項は HT が compensated price derivative in the short sun（〔2〕の p. 199 の (49)）と呼んでいるものに他ならない．

HT はアメリカ（1929–1941, 1946–1964），カナダ（1926–1939, 1946–1964），オランダ（1920–1939, 1949–1962），スウェーデン（1931–1958）の4ヵ国について上述の需要方程式体系を計測している．需要体系はアメリカでは貯蓄を含む12費目，カナダでは貯蓄を含む9費目の方程式から成り，オランダでは食料（8費目）を主体にした16費目，スウェーデンでは8費目の方程式から成り立っている．

結果表（〔2〕の表 5.3 から表 5.14）に誤差項の分散（共分散は掲載されていない）とそれに対応する代替項（compensated own-price desivative）とが明記されているので，それらの値を組にして散布図に示してみると図1から図4にみるような結果がえられる．いずれの図においても，分散と −1 を乗じた代替項とを対数変換した値が示されている．(44)の関係が真であり，かつ推定誤差なしとせば散布図の点は勾配1の直線上に並んでいなければならない．誤差項の分散と compensated own-price desivative の間の関係でみる限り，(44)の関係は経験的にも肯定しうる関係であるように思える．

図1　アメリカの場合



注．費目12 (Saving) は除かれている．

図2　カナダの場合

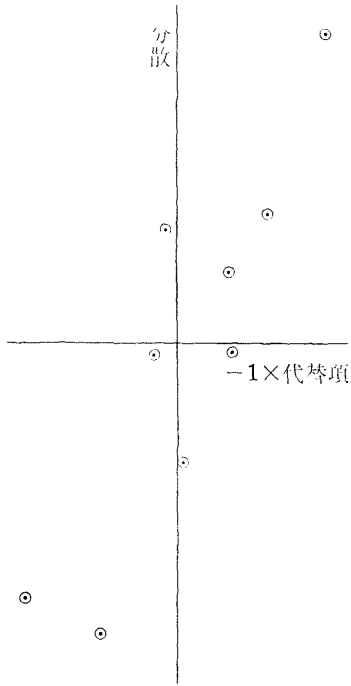


図3　オランダの場合

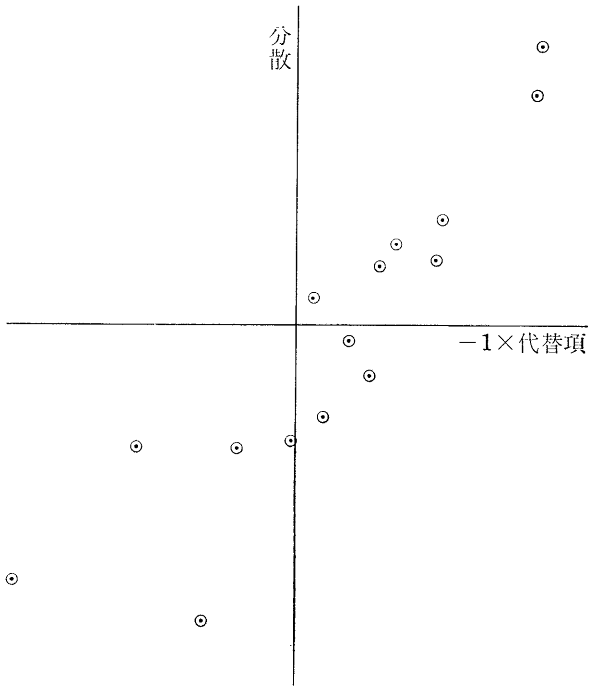
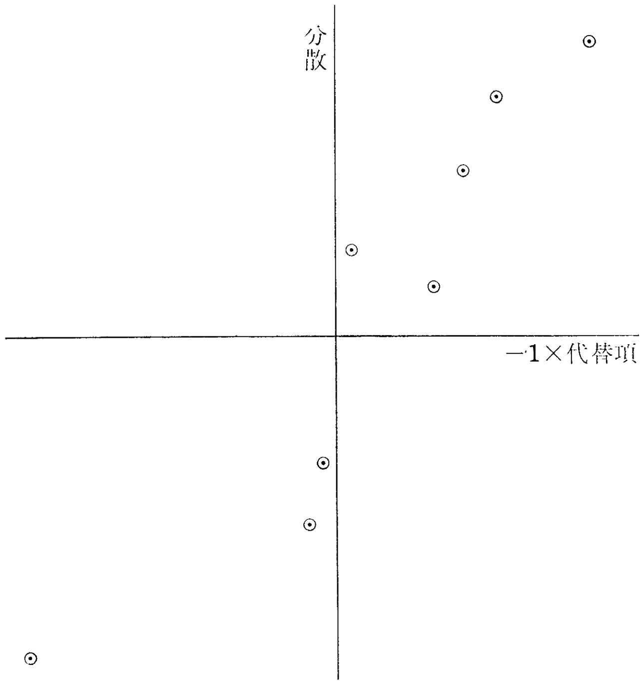


図4　スウェーデンの場合



注．費目14（rent）は正の代替項をもつので除外されている．

参 考 文 献

〔1〕 Barten, A. P., "Estimating Demand Equations," *Econometrica*, Vol. 36, No. 2, 1968, pp. 213–251.

〔2〕 Houthakker, H. S. and L. D. Taylor, *Consumer Demand in the United States, second and Enlarged Edition*, Cambridge, Mass. 1970.

〔3〕 Kalman, P. J. and M. D. Intriligator, "Generalized Comparative Statics with Applications to Consumer Theory and Production Theory," *International Economic Review*, Vol. 14, No. 2, 1973, pp. 473–486.

〔4〕 Theil, H., "A Theory of Rational Random Behavior," *Journal of the American Statistical Associations*, Vol. 69, No. 346, 1974, pp. 310–314.

〔5〕 Theil, H., "An Economic Theory of the Second Moments of Disturbances of Behavioral Equations," *The American Economic Review*, Vol. 61, No. 1, 1971, pp. 190–194.

〔6〕 Theil, H. and H. Neudecker, "Substitutions, Complementarity, and the Residual Variation around Engel Curves," *Review of Economic Studies*, Vol. 25, No. 67, 1958, pp. 114–123.

〔7〕 Takayama, A., *Mathematical Economics*, The Dryden press, 1974.

〔8〕 Zellner, A., J. Kementa and J. Drèze, "Specification and Estimation of Cobb-Douglas Production Function Models," *Econometrica*, Vol. 34, No. 4, 1966, pp. 784–795.

（研　究　員）