集計的需要関数について

三　枝　義　清

1. 主　題

経済分析にとって集計問題（aggregation problem）は古く，且つ新しい問題である．需要分析の場合，財間と消費者間とにわたって２種類の集計が生ずるが，面倒なのは後者の集計問題である．この問題に関連した研究は今日まで数多く見られるが，最近の成果の中で注目すべきものは Dixon, Lancaster 並びに Muellbauer によるものである．家計は何人かの世帯員の集合体であるから，家計としての集計的行動は単一の消費者の行動と同一視するわけにはゆかぬだろう．

Lancaster〔7〕は家計レベルで生ずる集計問題を取りあげて，家計の行動を単一の消費者行動で代替することの是非を論じている．Dixon〔5〕の試みは技巧的に構成された社会的効用関数を使って，集計的な市場需要関数に

対して個別需要関数と同様な性質を想定することの誤りを評価しようとしたものである．Muellbauer〔9〕,〔10〕はエコノミストの間で達観的に，あるいはあいまいに使われている“代表的消費者”の概念を明確に定式化しようとしている．

上記の諸成果をレビューしつつ，消費者需要理論における集計問題の現況を明らかにしようとするのが本稿の第一の意図である．Muellbauer による“代表的消費者”の定式化が及ぼす影響は多様であるが，ここではエコノメトリカルな応用を重視して Muellbauer によって誘導された需要体系に注目する．彼の体系は既製の体系へのチャレンジであり，今後の需要関数論争を方向づけるものと思われる．Muellbauer の需要関数体系の特徴やメリットを明らかにするのが本稿の第二の意図である．“代表的消費者”を定式化するのに支出関数が使われているが，支出関数は生産関数に対応する費用関数に相当するもので効用関数と双対的な関数である．

Muellbauer の“代表的消費者”の特徴づけが１例であるが，問題によっては効用関数の代わりに支出関数を使う方が得策なことがある．本稿の議論の中で支出関数の他に間接的効用関数，利潤関数など，効用関数と双対的な関数を積極的に利用しているが，需要分析に双対関係を利用することの有用性を強調したかったからである．第２節はそのための節である．

2. 消費者需要理論における双対関係

n 個の財に対する選好が連続な効用関数

$u=u(x_1, x_2, \cdots, x_n) \equiv u(x)$ で表現されたとすると，消費者による選択は次の最大問題（A）として定式化される．

p_i は i 財の価格で，y は所得．

$$\left.\begin{aligned}&\underset{x}{\mathrm{Max}}\ u(x)\\&\mathrm{s.\,t.}\ p^T x=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq y\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{A})$$

この最大問題から誘導される需要関数を

$$x_i=f^i(y,p) \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (2.1)$$

と表わす．問題（A）に対して次の最小問題（B）を考える．

$$\left.\begin{aligned}&\underset{x}{\mathrm{Min}}\ p^T x\\&\mathrm{s.\,t.}\ u(x)\geq u\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{B})$$

所定の効用水準 u を達成するための費用を最小化する問題であるが，この最小問題における最適解は価格ベクトルと u に依存するから

$$x_i=g^i(u,p) \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (2.2)$$

とおくと，最小費用は

$$\mathrm{Min}\{p^T x \mid u(x)\geq u\}=\sum_{i=1}^{n} p_i g^i(u,p)\equiv E(u,p) \qquad (2.3)$$

と表わされる．(2.3) で定義された関数 $y=E(u,p)$ を支出関数 (expenditure function) とよぶ．これに対して，(2.2) の需要関数を補償された需要関数 (compensated demand function) とよぶ．(2.1) の需要関数を m.d.f. (marshallian demand function)，(2.2) の需要関数を c.d.f. と記して区別する．支出関数は価格をタームにし

て定義されている関数であるが，効用関数と同じように，消費者の選好を規定するものである．支出関数の性質および効用関数との双対関係については Appendix に明記した通りであるが，応用上重要なのは次の性質である．支出関数を p_i で偏微分すると最小問題（B）の最適需要量 x_i がえられる．

$$\frac{\partial E(u,p)}{\partial p_i}=g^i(u,p) \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (2.4)$$

∵　p^* のもとでの最適需要量を $x_1^*, x_2^*, \cdots$ とおく．

$x_i^*=g^i(u,p^*) \qquad i=1,2,\cdots,n$

任意の価格 $p\geq 0$ のもとでは次の不等式が成立する．

$Z(p)\equiv\sum p_i x_i^*-E(u,p)\geq 0$

$p=p^*$ の時に限り $Z(p)=0$ だから

$$\left.\frac{\partial Z(p)}{\partial p_i}\right|_{p=p^*}=0$$

従って，

$$x_i^*=\left.\frac{\partial E(u,p)}{\partial p_i}\right|_{p=p^*}$$

$E(u,p)$ が u の増加（強い意味で）関数である場合には $E(\cdot,p)$ の逆変換をつかって次の関数が誘導される．

$u=E^{-1}(y,p)\equiv V(y,p)$

$V(y,p)$ は効用関数 $u(x)$ に対して間接的効用関数（indirect utility function）とよばれるもので，最大問題

(A)の最大値を (y,p) の関数として表現したものである．すなわち

$$V(y,p)=\underset{x}{\mathrm{Max}}\{u(x)\mid p^T x\leq y\}$$

(2.1) の m. d. f. と (2.2) の c. d. f. の間には次の関係がある．

c. d. f. の変数 u を $u=V(y,p)$ とおくと

$$g^i(V,p)=f^i(y,p) \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (2.5)$$

他方，m. d. f. の変数 y を $y=E(u,p)$ とおくと

$$f^i(E(u,p),p)=g^i(u,p) \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (2.6)$$

その他，恒等的に

$$y=E(V(y,p),p) \qquad (2.7)$$

(2.4) と (2.5) によって

$$f^i(y,p)=\left.\frac{\partial E(u,p)}{\partial p_i}\right|_{u=V(y,p)} \qquad (2.8)$$

(2.7) の両辺を p_i で偏微分して，(2.8) を用いると

$$f^i(y,p)=-\frac{\partial V(y,p)}{\partial p_i}\Big/\frac{\partial V(y,p)}{\partial y} \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (2.9)$$

間接的効用関数 $V(y,p)$ を p_i と y について偏微分することによって，i 財の m. d. f. が誘導されるわけだが，(2.9) は Roy の定理と呼ばれている．

消費者の選好を規定するという点については効用関数，支出関数，間接的効用関数はお互いに同等であるが，支出関数には (2.4)，間接的効用関数には (2.9) にみるような利点がある.

(2.4) と (2.6) を組み合わすと，$E(\cdot)$ について次のような偏微分方程式がえられる.

$$\frac{\partial E}{\partial p_i}=f^i(E,p) \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (2.10)$$

(2.10) の両辺を p_j で偏微分することにより，需要理論における基本方程式であるスルツキー (Slutzky) 方程式 (2.11)が導ける. $\dfrac{\partial g}{\partial p}$が代替項である.

$$\frac{\partial x}{\partial p}=\frac{\partial g}{\partial p}-\frac{\partial x}{\partial y}x^T \qquad (2.11)$$

ただし，

$$\left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right]_{n\times n}\equiv\frac{\partial x}{\partial p}, \qquad \left[\frac{\partial x_i}{\partial y}\right]_{n\times 1}\equiv\frac{\partial x}{\partial y}$$

$$\left[\frac{\partial g^i}{\partial p_i}\right]_{n\times n}\equiv\frac{\partial g}{\partial p}$$

$$\because \quad \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_j}=\frac{\partial f^i}{\partial p_j}+\frac{\partial f^i}{\partial E}\cdot\frac{\partial E}{\partial p_j}$$

$E(u,p)$ の u を，$u=V(y,p)$ に選ぶと

$$E=y, \qquad \frac{\partial E}{\partial p_i}=f^i(y,p)$$

となる．$x_i=f^i(y,p)$ とおくと

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j}=\frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_j}-\frac{\partial x_i}{\partial y}\cdot x_j$$

$$=\left.\frac{\partial g^i}{\partial p_j}\right|_{u=V(y,p)}-\frac{\partial x_i}{\partial y}\cdot x_j$$

(2.4) あるいは (2.10) の方程式は需要関数の積分可能条件と密接な関係をもっている．消費者の財の選好が費用最小あるいは効用最大とコンシステントであるか否かは，換言すれば (2.4) あるいは (2.10) の微分方程式が支出関数 $E(\cdot)$ に "integrate back" できるか否かという問題である．

(2.4) あるいは (2.10) は次のように変形できる．

$$\frac{p_i g^i}{E(u,p)}=\frac{p_i}{E}\frac{\partial E}{\partial p_i}=\frac{\partial \log E(u,p)}{\partial \log p_i} \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (2.12)$$

$\sum_i p_i g^i=E$ であるから，(2.12) の左辺は総支出 E に占める i 財の支出割合 (budget share) を表わしている．(2.12)の u を $u=V(y,p)$ とおけば，次のように通常の budget share に関する式がえられる．

$$\frac{p_i x_i}{y}=\left.\frac{\partial \log E(u,p)}{\partial \log p_i}\right|_{u=V(y,p)} \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (2.13)$$

ただし，$x_i=f^i(y,p)$

利潤関数 (profit function) は生産関数に附随した概念であるが，所得の限界効用の逆数を効用の隠伏的価格と解釈すれば，利潤関数を一つの分析用具として需要理論の中に持ちこむことができる．所得の限界効用をタームに

して需要分析を展開したい場合には，次に述べるように利潤関数を利用するのが便利である．

問題（A）で得られる所得 y の限界効用を λ とおく．ただし $\lambda>0$ とする．λ が既知として，$q\equiv 1/\lambda$ とおいて次の最大問題（C）を解いてみる．

問題（C）　(q,p) を所与として

$qu(x)-p^Tx$ を最大化する．

ただし，$q=1/\lambda$

問題（C）の最適解は

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{p_i}{q}=\lambda p_i \qquad i=1,2,\cdots,n$$

の解であるから，問題（A）の最適解と一致するはずである．問題（C）の最大値は $u(x)$ の利潤関数として表わせるから，この関数を $\pi(q,p)$ とおく．すなわち

$$\pi(q,p)\equiv\underset{x}{\mathrm{Max}}\{qu(x)-p^Tx\} \qquad (2.14)$$

Appendix の (2.21) を用いて，(2.14) より m.d.f. の $x_i=f^i(y,p)$ が導ける．

$$\frac{\partial\pi(q,p)}{\partial p_i}=-x_i \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (2.15)$$

ただし，q は $1/\lambda$ に固定されている

$\pi(q,p)$ を q で偏微分すれば indirect utility function がえられる．いま導いた (2.15) と appendix の (2.22) とを用いて，需要関数の比較静学分析を実行してみる．

p_j が微小変化すれば，当然 y の限界効用 λ も変化するが，(2.15) によって x_i の price partial を評価すると

$$-\frac{\partial x_i}{\partial p_j}=\frac{\partial^2\pi}{\partial p_i\partial p_j}+\frac{\partial^2\pi}{\partial p_i\partial q}\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\qquad i,j=1,2,\cdots,n$$

行列形式にまとめて

$$-\left[\frac{\partial x_i}{\partial p_i}\right]_{n\times n}=\left[\frac{\partial^2\pi}{\partial p_i\partial p_j}\right]-\left[\frac{\partial^2\pi}{\partial p_i\partial q}\right]\frac{\lambda_p}{\lambda^2}$$

ただし，$\lambda_p=\left[\frac{\partial\lambda}{\partial p_1},\cdots,\frac{\partial\lambda}{\partial p_n}\right]$

Appendix の (2.22) を用いると

$$\frac{\partial x}{\partial p}=\lambda U^{-1}+U^{-1}p\lambda_p \qquad (2.16)$$

ただし，$\frac{\partial x}{\partial p}\equiv\left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right]_{n\times n}$

$$U\equiv\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right]$$

$$p=[p_1,\cdots,p_n]^T$$

同じ要領で各財の income partial がえられる．

$$\frac{\partial x}{\partial y}=U^{-1}p\lambda_y \qquad (2.17)$$

ただし，$\dfrac{\partial x}{\partial y} \equiv \left[\dfrac{\partial x_i}{\partial y}\right]_{n\times 1}$

$$\lambda_y \equiv \frac{\partial \lambda}{\partial y}$$

(2.16) の両辺に p^T を乗じて整理すると

$$-\lambda_p = x^T \lambda_y + \lambda\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^T \qquad (2.18)$$

ただし，$\left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)^T = \left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)$ の転置行列

Appendix

需要理論における双対関係については参考文献の〔3〕,〔4〕,〔6〕等に詳しく述べられているが，ここでは当面の問題に必要な事項だけを要約しておく．

(イ) 支出関数について

伝統的需要理論では次の性質をもつ効用関数 $u(x)$ が前提されている．

(1) 連続，"強い意味で擬凹" (strictly quasi-concave) である．すなわち無差別曲面が原点に関して凸（強い意味で）．

(2) 局所的に非飽和，あるいは非減少関数である．

より強い条件として，

(3)　2回連続微分可能.

(4)　縁付きヘシアン（bordered Hessian）が非特異.

上記の(1),(2)の性質をもつ効用関数の支出関数 $E(u,p)$ は次の性質をもつ.

(a)　$p>0$ に関して一次同次であり，且つ連続微分可能な凹関数である.

(b)　u について単調増加.

(c)　(u,p) に関して連続.

(d)　$\dfrac{\partial E}{\partial p_i}=g^i(u,p)\qquad i=1,2,\cdots,n.$

(f)　効用関数が(1),(2)の他に(3),(4)の性質をもてば，E はすべての $p>0$ について2回連続微分可能となり，E のヘシアンは対称で非正定符号（negative semidefinite）である．ヘシアンの階数は $n-1$.

上記の(a)〜(c)の性質は支出関数を完全に特徴づける性質であるが，この点について次の定理が成り立つ.

(e)　ある関数 $E(u,p)$ が(a)〜(c)の性質をもつものとして

$$u(x)\equiv\underset{u}{\mathrm{Max}}\{u\mid p^Tx\geq E(u,p),\ \text{すべての}\ p>0\ \text{について}\}\qquad(2.19)$$

(2.19)で $u(\cdot)$ を定義したとする．そうすると $u(\cdot)$ は効用関数としての性質(1),(2)を備え，さらにこの $u(\cdot)$ から支出関数を誘導すると，その支出関数は $E(u,p)$ に一致する．この定理はよく知られている生産関数と費用関数の間の双対定理のアナロジーである.

性質(a)〜(c)を備えた関数 $E(\cdot)$ には必ず支出関数として $E(\cdot)$ を生成する効用関数が存在するから，消費者の選好に関する議論は効用関数を直接に使わなくても支出関数を媒介にして展開できるわけである.

例題.

(2. 19) に関連した例題として，ストーンの線形支出体系を生成する支出関数と効用関数を求めてみる.

線形支出体系　$f^i(y,p)=-a_i+\frac{b_i}{p_i}(y+\sum_{i=1}^{n}p_ia_i)$

ただし，$b_i>0$，　$\sum_i b_i=1$

上式を (2. 10) に代入すると，Eについての方程式がえられる.

$$\frac{\partial E}{\partial p_i}=-a_i+\frac{b_i}{p_i}(E+\sum_i p_ia_i)$$

$E+\sum p_ia_i=F$ とおくと

$$\frac{\partial \log F}{\partial \log p_i}=b_i \qquad i=1,2,\cdots,n$$

従って

$$\log F=T(u)+\sum_{i=1}^{n}b_i\log p_i$$

ただし，$T(\cdot)$＝任意の単調増加関数

元に戻して

$$\log(E+\sum p_ia_i)=T(u)+\sum b_i\log p_i$$

つづいて，(2. 19) によって効用関数を求める.

(2. 19) の制約条件を次のように表わされるから

$$\sum p_i x_i \geq E(u,p) \Rightarrow \log \sum p_i(x_i+a_i) - \sum b_i \log p_i \geq T(u)$$

$u(x)$ を求めるには上式の左辺を p について最小化すればよい.

$$\operatorname*{Min}_{p}\{\log \sum p_i(x_i+a_i) - \sum b_i \log p_i\} = \sum b_i \log(x_i+a_i) - \sum b_i \log b_i$$

当然のことであるが，次のようなストーン・ギアリー型の効用関数がえられる.

$$u(x) = T\{\sum b_i \log(x_i+a_i)\}$$

(ロ) 間接的効用関数

普通は間接的効用関数 $V(y,p)$ を

$$V(y,p) \equiv \operatorname{Max}\{u(x) \mid p^T \leq y\}$$

で定義するが，支出関数を媒介にして次のように定義することもできる.

$$V(y,p) = \operatorname{Max}\{u \mid E(u,p) \leq y\}$$

$E(\cdot,p)$ が単調増加であることが保証されておれば，$u=E^{-1}(u,p)=V(y,p)$ とすればよい. 支出関数の性質から $V(y,p)$ は p について連続で擬凸 (quasi-convex)，且つ非増加である. y については増加関数. また (y,p) について 0 次同次であるから次のような基準化された価格 p^* をタームにした間接的効用関数が誘導される.

$$V(p^*) \equiv V(p,y) \qquad ただし，p^* = \frac{p}{y}$$

$V(p^*)$ は p^* について連続で擬凸，且つ非増加である. 支出関数の性質(e)より $V(p^*)$ と $u(x)$ の間に双対関係が成立する.

$$u(x)\equiv\underset{p^*}{\mathrm{Min}}\{V(p^*)|\sum p_i{}^*x_i\leq 1,\ p^*>0\} \qquad (2.20)$$

(2.20) によって間接的効用関数を生成する効用関数を再現できる.

(ハ) 利潤関数

生産関数を $F(x)$, 産出物の価格を q, 投入財の価格ベクトルを p とすると利潤関数 $\pi(q,p)$ は次式で定義される.

$$\pi(q,p)\equiv\underset{x}{\mathrm{Max}}\{qF(x)-p^Tx\}$$

費用関数と並んで生産関数と双対的な関数である. $F(x)$ が2回連続微分可能, $F(x)$のヘシアンが負定符号として上記の最大問題の最適解を $x^*=H(q,p)$, そして $u^*=F(x^*)$ と表わすと,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\pi(q,p)}{\partial p_i}&=-x_i{}^*\\ \frac{\partial\pi(q,p)}{\partial q}&=u^*\end{aligned}\right\} \qquad (2.21)$$

さらに, $F(x)$ と $\pi(q,p)$, それぞれのヘシアンの間に次の関係がある.

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\partial^2\pi}{\partial p_i\partial p_j}\right]_{n\times n}&=-\frac{1}{q}\left[\frac{\partial^2F}{\partial x_i\partial x_j}\right]^{-1}\\ \left[\frac{\partial^2\pi}{\partial p_i\partial q}\right]_{n\times 1}&=\frac{1}{q^2}\left[\frac{\partial^2F}{\partial x_i\partial x_j}\right]^{-1}p\end{aligned}\right\} \qquad (2.22)$$

ただし, (2.22) の右辺の行列は $x=H(q,p)$ で評価するものとする

3. 家計需要関数について

3.1 世帯レベルでの集計

家計を対象にして需要分析をする場合，家計をあたかも単一の消費者であるように前提するのが慣例であるが，果たして妥当な前提だろうか．どのような理由づけで単一の消費者とみなしうるのだろうか．家計レベルの集計問題を扱った研究は極めて少なく，系統的に論じたのは Lancaster〔7〕が始めてではないかと思う．Lancaster は伝統的需要理論と属性的需要理論，二通りの観点から論じているが，ここでは前者の観点からする結論だけを紹介する．世帯レベルでの集計問題の特徴を二つ挙げている．

(イ) 世帯は世帯員の集合であるから世帯内で集計される消費者の数が小さい．

(ロ) 世帯は構成員の間に密接な連帯をもつグループである．

まず(イ)の点に注目してみる．個別の消費者について成立するスルツキー方程式を次のよう表わしておく．

$$V = K - bx^T \qquad (3.1)$$

ただし，$V \equiv \dfrac{\partial x}{\partial p}$，$K \equiv \dfrac{\partial g}{\partial p}$，$b = \dfrac{\partial x}{\partial y}$

代替行列Kは非正定符号の対称行列である．財ベクトル $x=(x_1, \cdots, x_n)^T$ に直交する，お互いに独立なベクトル A^k を $(n-1)$ だけ選べるから，それらのベクトルから $n\times(n-1)$ の行列Aを作る．

$$A = [A^1, A^2, \cdots, A^{n-1}]$$

ただし，$x^T A^k = 0 \qquad k = 1, 2, \cdots, n-1$

(3.1) の両辺に A^T を左から，Aを右から乗ずると

$$A^T V A = A^T K A - A^T b x^T A = A^T K A \qquad (3.2)$$

Vそのものは必ずしも非正定符号の対称行列ではないが，Vに適当な変換を施せば，(3.2) にみるように $A^T V A$ が $(n-1)$ 次の非正定符号の対称行列になることが判る．2節で述べたように $K = \dfrac{\partial g}{\partial p}$, $g(u, p)$ は c. d. f. であるから，K が n 次の非正定符号の対称行列であるという性質を c. d. f. の n 次の“凹性”と呼べば，m. d. f. は $(n-1)$ 次の“凹性”をもつといえるだろう．

以上は単一の消費者についての議論であるが，つぎに M 人の消費者の需要量 x^m を集計した場合を検討してみる．それぞれの消費者が各自の予算と選好に従って，お互いに独立に財の選択をなしたとすれば，集計需要量 $\bar{x}$ の price partial は

$$\overline{V} = \sum_{m=1}^{M} V^m$$

ただし，$V^m = \dfrac{\partial x^m}{\partial p} \qquad m = 1, 2, \cdots, M$

$$\overline{V} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial p} \qquad \bar{x} = \sum_{m=1}^{M} x^m$$

となり，各消費者のスルツキー方程式を

$$V^m = K^m - b^m (x^m)^T$$

とおけば

$$\overline{V}=\sum K^m-\sum b^m(x^m)^T \qquad (3.3)$$

M 個の財ベクトル $x^1, x^2, \cdots, x^M$ がお互いに独立で，且つ $n>M$ であったとしよう．この M 個のベクトルに直交する，お互いに独立なベクトル $\bar{A}^k$ を $(n-M)$ 個選べるから，それらのベクトルから $n\times(n-M)$ の行列 $\bar{A}$ を作りうる．

$$\bar{A}=[\bar{A}^1, \bar{A}^2, \cdots, \bar{A}^{n-M}]$$

ただし，$(x^m)^T\bar{A}_k=0 \qquad m=1,2,\cdots,M$

$\qquad\qquad\qquad\qquad k=1,2,\cdots,n-M$

(3.3) の両辺に $\bar{A}^T$ を乗じて

$$\bar{A}^T\overline{V}A=\sum_{m=1}^{M}\bar{A}^TK^m\bar{A} \qquad (3.4)$$

$\bar{A}^T\overline{V}A$ は $(n-M)$ 次の非正定符号の対称行列になるから，結局集計された需要関数は $(n-M)$ 次の凹性をもつだろう．従って n に比べて M が小さいほど $\overline{V}$ は個別の消費者の V^m と類似した性質をもつといってよい．以上のような理由づけで，Lancaster は世帯員数に比べて選択される財の数が大きければ，世帯の行動は単一の消費者行動に近接するだろうと述べている．

以上の議論では個別の消費者は各自の予算と選好に従ってお互いに独立に行動するものと前提したが，(ロ)に挙げたように世帯は内部に密な連帯をもつグループである．各世帯員は独自の選好をもつであろうが，家計はグループとしての決定関数をもっているはずである．

決定関数が次のように定式化されたものとする.

各メンバーの効用関数を $u^m(x^m)$ として家計の決定関数を

$$W[u^1(x^1),\cdots,u^M(x^M)] \qquad (3.5)$$

ただし，$x^m=(x_{m1},x_{m2},\cdots,x_{mn})^T$

と表わす. $W(\cdot)$ は世帯員の選好の程度を重みづけする評価関数である. (3.5) の決定関数は社会的厚生関数に相当する関数であるが，それに比べれば，より現実味のある関数であろう. 社会的厚生関数に関して既に明らかにされた性質であるが，$u^m(x^m)$ がすべて凹（強い意味で），$W(u^1,\cdots,u^m)$ は $\dfrac{\partial W}{\partial u^m}>0$, $m=1,2,\cdots,M$ で擬凹（強い意味で）とすると (3.5) は $x_{mi's}$ に関して擬凹（強い意味で）となり，通常の効用関数としての性質をもつことになる.

家計の決定関数が (3.5) で与えられたとすると，家計の所得 y が与えられた時の各世帯員の消費量は次の最大問題の最適解 x^{*m} で与えられ，総消費量 x^* は $x^*=\sum_{m=1}^{M}x^{*m}$ となる.

$$\begin{aligned}&\text{Max}\ \ W[u^1(x^1),\cdots,u^M(x^M)]\\&\text{s.t.}\ \ p^T\textstyle\sum x^m\leq y\end{aligned} \qquad (3.6)$$

ところで，決定関数 W が $x_{mj's}$ について擬凹（強い意味で）とすると，次の(3.7)で定義された $u(x)$ は擬凹（強い意味で），且つすべての $u^m(x^m)$ が増加（非減少）関数であれば $u(x)$ も増加（非減少）関数になる.

$$u(x)\equiv\underset{x^1,\cdots,x^M}{\text{Max}}\{W[u^1(x^1),\cdots,u^M(x^M)]\,|\sum_{m=1}^{M}x^m=x\} \qquad (3.7)$$

(3.7) の $u(x)$ を用いて次の最大問題を解いてみると

$$\begin{aligned} &\max_{x}\ u(x) \\ &\text{s.t.}\ \ p^T x \leq y \end{aligned} \qquad (3.8)$$

問題 (3.8) の最適解は問題 (3.6) よりえられる総消費量 x^* に一致してしまう．従って (3.7) の $u(x)$ を家計の集計的効用関数とみなすことが出来る．このように家計の決定関数が適当な性質をもてば家計をあたかも単一の消費者の如く扱うことができるわけである．

3.2　世帯構成変数の導入と家計需要関数体系の選択

家計需要が世帯構成に依存することはあきらかであるが，この要因を明示的に需要理論の中に組み入れたのは Barten である．性別・年齢別等の分類によるカテゴリー毎の家族数を θ_d として，$\theta=(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_f)$ で家計のタイプづけをすることにする．Barten は財(i)の消費に関してはタイプ θ の家計は $a_i(\theta)$ 人の成人（男子）と同等であると考えて，タイプ θ の家計効用関数 u^θ を次のように特定化した．

$$u^\theta = u\left(\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}, \cdots, \frac{x_n}{a_n}\right) = u(x^a) \qquad (3.9)$$

ただし，$a_i = a_i(\theta)$

$$x^a = (x_1/a_1, \cdots, x_n/a_n)^T$$

a_i は θ のみに依存するパラメータである．x^a は成人相当数 a_i's で修正された財ベクトルであるが，所謂“1人当たり”の消費ベクトルとみられる．

a_i's で表わされた世帯構成変数が家計需要関数の中にどのように現われるかは (3.9) の支出関数を導くことにより明らかになる．

u^θ の支出関数を $E^\theta(u,p)$ とおくと

$$E^\theta(u,p)=\underset{x}{\mathrm{Min}}\{p^T x \mid u(x^a)\geq u\}$$

$$=\underset{x^a}{\mathrm{Min}}\{\sum_i (p_i a_i) x_i{}^a \mid u(x^a)\geq u\}$$

ただし，$x_i{}^a=\dfrac{x_i}{a_i}$

効用関数 $u(\cdot)$ の支出関数を $E(u,\cdot)$ とおくと

$$E^\theta(u,p)=E(u,p^a) \qquad (3.10)$$

ただし，$p^a=(a_1p_1,\cdots,a_np_n)^T$

従って，$E^\theta(u,p)$ は $E(u,\cdot)$ の価格変数を修正された価格ベクトル p^a に置き換えたものに一致することが判る．

支出関数の性質より直ちに需要関数（c. d. f.）がえられる．

$$x_i{}^a=g^i(u,p^a) \qquad (3.11)$$

ただし，$g^i(u,p^a)=\left.\dfrac{\partial E}{\partial p_i}\right|_{p_i=a_ip_i}$

元に戻せば，家計の総需要量に関する需要関数（c. d. f.）がえられる．

$$x_i=a_ig^i(u,p^a) \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (3.12)$$

他方，m. d. f. は

$$x_i{}^a = -\frac{V_i(y,p^a)}{V_0(y,p^a)} \qquad (3.13)$$

ただし，$V(y,\cdot)=u(\cdot)$ の間接的効用関数

$$V_i(y,p^a)=\left.\frac{\partial V}{\partial p_i}\right|_{p=p^a}$$

$$V_0(y,p^a)=\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{p=p^a}$$

で与えられるから家計需要関数（m. d. f.）は

$$x_i=a_i\left\{-\frac{V_i(y,p^a)}{V_0(y,p^a)}\right\}=a_i f^i(y,p^a) \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (3.14)$$

ここで家計のクロス・セクション・データを使ってエンゲル曲線を推定する問題を取り上げてみたい．世帯構成変数を Barten のモデルに従って組み入れたとすると，その場合の家計需要関数（m. d. f.）は一般に（3.14）で与える．（3.14）において y と p^a が交絡している場合には，（3.14）より導かれるエンゲル曲線のフォームは世帯構成の変化に伴って複雑な変化をするであろう．

もし需要関数 $f^i(\cdot)$ を（3.15）のように

$$f^i(y,p^a)=D_{1i}(y)D_{2i}(p^a) \qquad (3.15)$$

所得変数と価格変数が分離するように選ぶことができれば

$$\log x_i=\log(a_iD_{2i})+\log D_{1i}(y) \qquad (3.16)$$

（3.16）が成立し，同じタイプの世帯については a_iD_{2i} が同一であるから，エンゲル曲線 $D_{1i}(y)$ のフォームを偏り

なく推定することができる.

そこで問題になるのは (3.15) のような性質をもつ需要関数体系としてどのような体系があるか，という問題である.

Carlevaro〔1〕,〔2〕と Muellbauer〔11〕とによって明らかにされた点は，m. d. f. が

$$x_i=D_{1i}(y)D_{2i}(p) \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (3.17)$$

(3.17) のように表現できるのは次の場合に限られる，ということである.

$$x_i=yh^i(p) \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (3.18)$$

ただし，$h^i(\cdot)$ は -1 次の同次関数で

$$\frac{\partial h^i}{\partial p_j}=\frac{\partial h^j}{\partial p_i}$$

結局，エンゲル曲線が線形で一次同次である，という特殊な場合に限られてしまう

例えば log-linear な需要体系が (3.17) の1例であるから

$$x_i=c_iy^{b_i}\prod_{j=1}^{n} p_j^{e_{ij}}$$

理論的な需要体系として成立するのはすべての b_i が $b_i=1$ となる場合である.

家計分析にとって (3.15) の需要体系が不適当だとすれば，それに代わるものを探さねばならない. Muellbauer〔11〕は次のような budget Share をタームにした需要体系を挙げている.

$$W_i=\frac{p_ix_i}{y}=v_i(y)A_i(p)+B_i(p) \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (3.19)$$

budget Share W_i を説明する需要関数 $W_i=W_i(y,p)$ を以下 budget Share function (b. s. f.) とよぶことにする．ところで，(3.14) の m. d. f. を書き改めると

$$W_i=\frac{p_i a_i f^i(y,p^a)}{y}=W_i(p^a,y) \qquad (3.20)$$

ただし，$W_i(\cdot)=f^i(\cdot)$ に対応する budget Share function (b. s. f.)

$W_i(\cdot)$ が (3.19) で与えられたとすると，タイプ θ の家計の b. s. f. は次の如くなる．

$$W_i=v_i(y)A_i(p^a)+B_i(p^a) \qquad (3.21)$$

ただし，$p^a=(p_1a_1,p_2a_2,\cdots,p_na_n)$

$$a_i=a_i(\theta) \qquad i=1,2,\cdots,n$$

(3.21) によれば $v_i(y)$ はどのタイプの家計にとっても共通，W_i は v_i をタームにして直線的関係にあり，その直線の勾配と切片が家計のタイプ毎に変動する，という具合に所得と世帯構成の効果がお互いに分離されている．統計的処理の面で都合のよい構造になっている．従って (3.19) の需要関数体系が需要理論と整合した体系になっていれば，(3.19) は世帯構成要因を取り入れた家計分析にとって誠に望ましい体系とみなせるわけである．

理論的な b. s. f. は (y,p) について0次同次でなければならぬから，この条件を課すると (3.19) の $v_i(y)$ の関数型が次のように確定してしまう．

$$v_i(y)=y^{\epsilon_i} \quad \text{あるいは} \quad v_i(y)=\log y$$

つづいて，予算制約条件より恒等的に $\sum_i W_i\equiv 1$ であるから，この条件を追加することにより

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(p)=0 \qquad \sum_{i=1}^{n} B_i(p)=1 \qquad \varepsilon_i=\varepsilon \qquad i=1,2,\cdots,n$$

がえられる．従って (3.19) の需要体系 (b. s. f.) は次のように特定化されてしまう．

$$W_i=y^{\epsilon}A_i(p)+B_i(p) \qquad (3.22)$$

あるいは

$$W_i=(\log y)A_i(p)+B_i(p) \qquad (3.23)$$

ただし，$i=1,2,\cdots,n$

$$\sum A_i(p)=0, \qquad \sum B_i(p)=1$$

上式の $A_i(p)$, $B_i(p)$ の関数型をさらに具体化するには (3.22), (3.23) を生成する効用関数あるいは支出関数を明確にしておかねばならない．詳しくは第5節で紹介するが

(3.22) を生成する支出関数

$$y^{-\epsilon}=d(p)^{-\epsilon}+ub(p)^{-\epsilon} \qquad (3.24)$$

(3.23) を生成する支出関数

$$\log y=\log d(p)+u\log\left(\frac{c(p)}{d(p)}\right) \qquad (3.25)$$

ただし，$d(p), b(p), c(p)$ は一次同次で $c(p)\geq d(p)$

(2.13) を用いて (3.24) より需要関数を求めると

$$W_i=(d/y)^{-\epsilon}(d_i-b_i)+b_i \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (3.26)$$

ただし，$d=d(p)$

$$d_i=\frac{\partial \log d(p)}{\partial \log p_i} \qquad b_i=\frac{\partial \log b(p)}{\partial \log p_i}$$

従って (3.22) の A_i, B_i は次のような構造になる．

$$A_i(p)=d^{-\epsilon}(d_i-b_i) \quad B_i(p)=b_i \qquad i=1,2,\cdots,n$$

他方，支出関数が (3.25) の場合には

$$W_i=\left[\frac{\log y-\log d}{\log(c/d)}\right](c/d)_i+d_i \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (3.27)$$

ただし，$(c/d)_i=\dfrac{\partial \log (c/d)}{\partial \log p_i}$

(3.23) の A_i, B_i は

$$A_i(p)=(c/d)_i/\log(c/d)$$

$$B_i(p)=\left[\frac{-\log d}{\log(c/d)}\right](c/d)_i+d_i$$

例　$d(p), b(p)$ を次の Cobb-Douglas 型の同次関数に選んでみる．

$$d(p)=\alpha_0\prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i} \qquad b(p)=\beta_0 \Pi p_i^{\beta_i}$$

(3.26) によって

$$W_i=(d/y)^{-\epsilon}(\alpha_i-\beta_i)+\beta_i \qquad (3.28)$$

(3.20) に示してあるように，タイプ θ の家計の需要体系 (b.s.f.) を求めるには (3.28) の d を $d=d(p^{\alpha})$ とおけばよい．

$$d=\alpha_0\prod_{i=1}^{n}(a_ip_i)^{\alpha_i}=a_0\alpha$$

ただし，$\alpha=\alpha_0\Pi p_i^{\alpha_i}$　　$\alpha_0=\Pi a_i(\theta)^{\alpha_i}$

だから

$$W_i=\left(\frac{\alpha a_0}{y}\right)^{-\epsilon}(\alpha_i-\beta_i)+\beta_i$$

a_0 が世帯構成の効果を示す項で，どの財にも共通に作用することになる．

世帯構成変数を組み入れた家計分析にとって，如何なる需要関数体系が望ましいか，という問題は以上の議論で明らかにされたと思うが，結局問題は (3.24) あるいは (3.25) の $b(p)$, $d(p)$ の選択にしぼられてしまったことになる．

(3.21) の需要体系 (b.s.f.) は v_i をタームにすれば W_i は v_i と直線的関係にあり，A_i がその勾配，B_i が切片になっている．これらの項は一般に家計の世帯構成に依存するであろうが，如何なる場合に，A_i あるいは B_i が家族構成と独立になるのであろうか．(3.21) 型の関数を応用しようとするものにとって関心のある問題であるが，Carlevaro〔2〕によって次のような解答が与えられている．

(イ) (3.21) の $B_i(p)$ がすべて，価格と独立にいるのは：

支出関数が (3.24) 型の時には

$$b(p)=\beta_0\prod_{i=1}^{n}p_i^{\beta_i},\qquad \sum_i\beta_i=1$$

$b(p)$ が Cobb-douglas 型の同次関数の場合に限られる.

支出関数が (3.25) 型の時には

$$\log y=\log d(p)+u$$

ただし, $d(p)=\alpha_0\Pi p_i^{\alpha_i}\qquad \sum_i\alpha_i=1$

という特殊な場合に限られる.

(ロ) $A_i(p)$ が価格と独立になるのは支出関数が次のように与えられる場合に限られる.

$$\log y=\log d(p)+u\prod_{i=1}^{n}p_i^{\beta_i}\qquad(3.29)$$

ただし, $\sum_i\beta_i=1$

つまり, (3.25) において $\log(c/d)=\Pi p_i^{\beta_i}$ とおいた場合である.

支出関数が (3.29) で与えられたとすると, 需要関数 (b. s. f.) は

$$W_i=(\log y-\log d)\beta_i+d_i\qquad(3.30)$$

ただし, $d=d(p)\qquad d_i=\dfrac{\partial\log d}{\partial\log p_i}$

従ってタイプ θ の家計の需要関数 (b. s. f.) は

$$W_i=K_i(\theta)+\beta_i\log y\qquad(3.31)$$

ただし, $K_i(\theta)=d_i(p^a)-\beta_i\log d(p^a)$

$$p^a=(a_1p_1, a_2p_2, \cdots, a_np_n)^T$$

(3.31) の右辺をみると，所得要因と世帯構成要因とが加法的に分離されていることが判る．

前出の (3.16) の体系（一般にはこのような体系は存在しない）と同様のメリットを備えている点に注目されたい．

4. Joint Maximization による市場需要関数の生成

4.1 集計的効用関数の構成

市場需要関数に関する研究は数多いが，最近発表された Dixon〔5〕の研究を取り上げてみたい．市場需要関数を測定する場合，スルツキー方程式とか効用関数の加法性から誘導される弾力性の間の関係など個別需要関数について成立する諸性質を市場需要関数に援用することが多い．消費者の集計的行動は単一の消費者の行動で代替できる，という暗黙の前提によるものであるが，この前提が保証されなければ当然誤りを犯すことになる．この種の集計誤差を評価しようというのが Dixon〔5〕の主題であるが，従来の研究と異なる点は集計的な効用関数を構成する，という接近法にある．そのために社会的厚生関数が設定されるが，家計の決定関数のような行動的性質を備えたものでなく全く技巧的な関数に過ぎない．

まず，各家計はお互いに独立に各自の予算と選好に従って次の最大問題（H. M. P.）を解くことにより財の購入を決定するものとする．

$$\left.\begin{array}{l}\text{Max } u^m(x^m)\\ \text{s.t. } p^T x^m = y^m\end{array}\right\}\ (\text{H. M. P.})\qquad m=1,2,\cdots,M \qquad (4.1)$$

ただし，$u^m(\cdot)=m$ 番目の家計の効用関数．特に強い意味で凹であると仮定する

$x^m=(x_1{}^m, x_2{}^m, \cdots, x_n{}^m)$ はm番目の家計の購入する財ベクトル．y^m は与えられた所得

M個の（H. M. P.）の最適解を $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \cdots, \bar{x}^M$ とおく．

適当な集計的効用関数 $u(x)$ が構成されたとして，次の集計的な最大問題を（A. M. P.）と記すことにする．

$$\left.\begin{array}{l}\text{Max } u(x)\\ \text{s.t. } p^T x = y\end{array}\right\}\ (\text{A. M. P.})\qquad (4.2)$$

ただし，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$

$$y=\sum_{m=1}^{M} y^m$$

もし，$\sum_{m=1}^{M}\bar{x}^m=$(A. M. P.) の最適解となるような $u(x)$ が構成できれば，$u(x)$ を集計的需要量 $\sum_m \bar{x}^m$ を生成する集計的効用関数とよべるわけである．

そこで（H. M. P.）より定まる所得の限界効用を β^m，$m=1,2,\cdots,M$として次の結合された最大問題（J. M. P.）を考えてみる．仮定によって β^m はすべて正．

$$\left.\begin{array}{l}\underset{\{x^m\}}{\text{Max}} \displaystyle\sum_{m=1}^{M} W^m u^m(x^m)\\ \text{s.t. } p^T \displaystyle\sum_{m=1}^{M} x^m = y\end{array}\right\}\ (\text{J. M. P.})\qquad (4.3)$$

ただし，$W^m = \frac{1}{\beta^m} \Big/ \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{\beta^m}$

$$y = \sum_{m=1}^{M} y^m$$

(J. M. P.) におけるウエイトの W^m は固定されたパラメータである．仮定によって $\sum W^m u^m(x^m)$ は $x_{js}{}^{m}$ について凹(強い意味で)．(J. M. P.) の最適解は M 個の (H. M. P.) の最適解 $\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^M$ に一致する．これは (J. M. P.) における y の限界効用を λ とすると，次の関係が成立するからである．

$$\lambda = W^m \beta^m \qquad m = 1, 2, \cdots, M \qquad (4.4)$$

家計効用関数の構成と同じ手続きであるが，(A. M. P.) の $u(x)$ を次のように構成する．

$$u(x) \equiv \underset{x^1, \cdots, x^M}{\mathrm{Max}} \{\sum_m W^m u^m(x^m) \mid \sum x^m = x\} \qquad (4.5)$$

この $u(x)$ は $x_1{}^1, x_2{}^1, \cdots, x_n{}^M$ について強い意味で凹となって，集計的需要量を生成する効用関数になる．すなわち (4.5) の $u(x)$ を用いて (A. M. P.) を解くことにより得られる最適解 $\bar{x}$ は集計的需要量 $\sum \bar{x}^m$ に一致する．これは

$$u(\bar{x}) = \mathrm{Max}\{\sum_m W^m u^m(x^m) \mid \sum x^m = \bar{x}\}$$

$$= \text{(J. M. P.) における} \sum_m W^m u^m(x^m) = \sum_m W^m u^m(\bar{x}^m)$$

となるからである．

Dixon〔5〕は $u(x)$ について，$u^m(\cdot)$ がすべて block additive であれば $u(\cdot)$ も block additive になる性質を明らかにしているが，その他に様々な性質を導くことができるだろう．

$u(x)$ の支出関数

$$
\begin{aligned}
E(u,p) &\equiv \underset{x}{\mathrm{Min}}\{p^T x \mid u(x) \geq u\} \\
&= \underset{x^1,\cdots,x^M}{\mathrm{Min}}\{p^T \sum_m x^m \mid \sum_m W^m u^m(x^m) \geq u\} \\
&= \mathrm{Min}\{\sum_m \underset{x^m}{\mathrm{Min}}\{p^T x^m \mid u^m(x^m) \geq u^m\} \mid \sum W^m u^m \geq u\} \\
&= \underset{u^1,\cdots,u^M}{\mathrm{Min}}\{\sum_m E^m(u^m,p) \mid \sum_m W^m u^m = u\} \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

ただし，$E^m(u^m,p) = u^m(x^m)$ の支出関数

例　個別の効用関数がストーン・ギアリー型の場合.

$$
u^m(x^m) = \sum_{i=1}^{n} b_i{}^m \log(x_i{}^m - r_i{}^m) \qquad m = 1, 2, \cdots, M \qquad (4.7)
$$

ただし，$x^m = (x_1{}^m, x_2{}^m, \cdots, x_n{}^m)^T$

とおくと

$$
E^m(u^m,p) = \exp(c^m + u^m) \prod_i p_i{}^{b_i{}^m} + \sum_i p_i r_i{}^m
$$

ただし，$c^m = -\sum_i b_i{}^m \log b_i{}^m$

(4.6) によって $E(u,p)$ を求めると

$$
E(u,p) = \exp(c+u) \prod_i p_i{}^{b_i{}^m} + \sum_i p_i r_i
$$

ただし，$b_i = \sum_m W^m b_i{}^m \qquad r_i = \sum_m r_i{}^m$

$$
c = -\sum_m \sum_i W^m b_i{}^m \log W_m b_i{}^m
$$

このように $E(u,p)$ は個別の支出関数と同じ型の支出関数となり，第２節 Appendix の例題より知れるように

集計的効用関数は

$$u(x)=\text{cost.}+\sum_{i=1}^{n} b_i \log(x_i-r_i) \qquad (4.8)$$

個別の効用関数と同じく，ストーン・ギアリー型になる．

$u(x)$ の利潤関数

（A. M. P.）における y の限界効用を λ，$q\equiv 1/\lambda$ とおいて（2. 14）で定義した利潤関数 $\pi(q,p)$ を求めてみる．

$$u(x)\equiv \operatorname*{Max}_{x^1,\cdots,x^M}\{\sum_m W^m u^m(x^m) \mid \sum_m x^m = x\}$$

$$\pi(q,p)\equiv \operatorname*{Max}_{x}\{qu(x)-p^T x\}$$

$$=\operatorname*{Max}_{x^1,\cdots,x^M}\{q\sum_m W^m u^m(x^m)-p^T\sum_m x^m\}$$

$$=\sum_m \operatorname{Max}\{qW^m u^m(x^m)-p^T x^m\}$$

従って

$$\pi(q,p)=\sum_m \pi^m(qW^m,p) \qquad (4.9)$$

ただし，$\pi^m(qW^m,p)=u^m(x^m)$ の利潤関数

（4. 4）によって

$$\pi(q,p)=\sum_m \pi^m\left(\frac{1}{\beta^m},\ p\right)$$

従って，次式をうる．

$$\frac{\partial \pi(q,p)}{\partial p_i}=\sum_m \frac{\partial \pi^m\left(\frac{1}{\beta^m},\ p\right)}{\partial p_i}$$

上式に (2.15) を使うと，当然のことであるが，

$$\bar{x}_i=\sum_{m=1}^{M}\bar{x}_i{}^m \qquad i=1,2,\cdots,n$$

であることが確かめられる．

4.2 固定ウエイトの (A.M.P.) における比較静学分析

(A.M.P.) において y と p がパラメトリックに変化する場合を考えてみる．各家計の β^m は一般に (y^m,p) に依存して変化するであろうが，ここではウエイトの W^m は動かさずに $W^m\propto$ 基準年次の $1/\beta^m$ と固定しておく．このようにウエイトを固定した (A.M.P.) を固定ウエイトの (A.M.P.) と呼ぶ．特別な場合を除けば，基準年次の (y,p) と異なった状況では固定ウエイトの (A.M.P.) は $\sum\bar{x}^m=\bar{x}$ となるような総需要量 $\bar{x}$ を生成しないだろう．例えば各家計の効用関数が (4.7) で与えられていたとする．(4.8) にみる通り集計的効用関数もストーン・ギアリー型であるから (A.M.P.) で生成される総需要量は次式で与えられる．

$$x_i=r_i+\frac{b_i}{p_i}(y-\sum p_i r_i) \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (4.10)$$

ただし，$b_i=\sum_{m=1}^{M}W^m b_i{}^m \qquad r_i=\sum_{m=1}^{M}r_i{}^m$

仮に各家計の β^m が年次毎に既知とすれば，年次毎に $\{W^m\}$ を，従って $b_i{}^m$ を変化させることにより (4.10) で集計的需要量 $\sum x^m$ を正確に生成できる．然し W^m が基準年次に固定された場合にはそうはゆかぬだろう．

固定ウエイトの (A. M. P.) より誘導される $\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j}$ と $\dfrac{\partial x_i}{\partial y}$ に注目する．

$$\left[\frac{\partial x_i}{\partial p}\right]_{n\times n}=\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)_{\text{A.M.P.}}\qquad\left[\frac{\partial x_i}{\partial y}\right]_{n\times 1}=\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)_{\text{A.M.P.}}$$

とおく．もしこれらの行列がそれぞれ集計的需要量 $\sum x^m$ の price partial 並びに income partial の行列に近似しておれば，$\sum x^m$ の変動は固定ウエイトの (A. M. P.) によって近似的に説明できるわけである．固定ウエイトの (A. M. P.) を使って，所得と価格による $\sum x^m$ の変動をシミュレートさせた場合どの位の誤差が生ずるか，というのが Dixon 〔5〕 の課題である．

誤差率の定義

$$\text{price partial の誤差率}=\frac{\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial p_i}\right)_T-\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{\text{A.M.P.}}}{\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_T}\tag{4.11}$$

$$\text{income partial の誤差率}=\frac{\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial y}\right)_T-\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial y}\right)_{\text{A.M.P.}}}{\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial y}\right)_T}\tag{4.12}$$

ただし，

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_T=\sum_m\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_T \qquad \left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_T$$ は（H. M. P.）よりえられる price partial

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial y}\right)_T=\sum_m\left(\frac{\partial x_i}{\partial y}\right)_T \qquad \left(\frac{\partial x_i}{\partial y}\right)_T$$ は（H. M. P.）よりえられる income partial

各家計の所得変化は比例的と，仮定する．すなわち

$$\frac{dy^m}{y^m}=\frac{dy}{y} \qquad m=1,2,\cdots,M$$

Dixon〔5〕は $\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{A\cdot M\cdot P\cdot}$, $\left(\frac{\partial x_i}{\partial y}\right)_{A\cdot M\cdot P\cdot}$ の評価の過程を省略しているが，興味深い内容をもっているのでその詳細を明らかにしておきたい．

$\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{A\cdot M\cdot P\cdot}$ の評価

(4.9) を p_i で偏微分して

$$x_i=-\sum_m\frac{\partial\pi^m}{\partial p_i}$$

上式を p_j で偏微分して

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{A\cdot M\cdot P\cdot}=-\sum_m\left\{\frac{\partial^2\pi^m}{\partial p_i\partial p_j}+\frac{\partial^2\pi^m}{\partial p_i\partial(qW^m)}\cdot\frac{\partial q}{\partial p_j}W^m\right\}$$

上式を行列形式にまとめてから (2.22) を利用すると

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)_{\text{A.M.P.}}=\sum_m\left\{\frac{U_m{}^{-1}}{qW^m}+\frac{U_m{}^{-1}p\lambda_p}{W^m}\right\}$$

ただし，

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)_{\text{A.M.P.}}=\left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{\text{A.M.P.}}\right]_{n\times n}$$

$$\lambda_p=\left[\frac{\partial \lambda}{\partial p_1},\cdots,\frac{\partial \lambda}{\partial p_n}\right]_{1\times n}$$

$$U_m{}^{-1}=\left[\frac{\partial^2 u^m}{\partial x_i{}^m\partial x_j{}^m}\right]^{-1}$$

$\lambda=\beta^m W^m$ をつかって，書き改めると

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)_{\text{A.M.P.}}=\sum_m\left\{\beta^m U_m{}^{-1}+\frac{\beta^m}{\lambda}U_m{}^{-1}p\lambda_p\right\} \qquad (4.13)$$

他方，(H. M. P.) における $\dfrac{\partial x_i{}^m}{\partial p_j}$ については，次式が成立している((2.16) を参照).

$$\left(\frac{\partial x^m}{\partial p}\right)_T=\beta^m U_m{}^{-1}+U_m{}^{-1}p\beta_p{}^m \qquad m=1,2,\cdots,M \qquad (4.14)$$

ただし，

$$\beta_p{}^m\equiv\left[\frac{\partial \beta^m}{\partial p_1},\ \frac{\partial \beta^m}{\partial p_2},\cdots,\frac{\partial \beta^m}{\partial p_n}\right]_{n\times n}$$

$$\left(\frac{\partial x^m}{\partial p}\right)_T\equiv\left[\frac{\partial x_i{}^m}{\partial p_j}\right]_{n\times n}$$

つづいて，

(4.14) を (4.13) に代入すると，

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)_T-\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)_{\text{A.M.P.}}=-\sum_m\frac{\partial x^m}{\partial y^m}Q^m \qquad (4.15)$$

ただし，$\left(\dfrac{\partial x}{\partial p}\right)_T=\sum_m\left(\dfrac{\partial x^m}{\partial p}\right)_T=\left[\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_T\right]_{n\times n}$

$$Q^m\equiv\frac{y^m}{\eta^m}\left(\frac{\lambda_p}{\lambda}-\frac{\beta_p{}^m}{\beta^m}\right) \qquad (4.16)$$

$$\eta^m=\frac{\partial\beta^m}{\partial y^m}\bigg/\frac{\beta^m}{y^m}\text{………“money flexibility”}$$

$$\frac{\partial x^m}{\partial y^m}=\left[\frac{\partial x_1{}^m}{\partial y^m},\cdots,\frac{\partial x_n{}^m}{\partial y^m}\right]^T$$

Q^m の計算式

$Q^m=[Q_1{}^m, Q_2{}^m,\cdots,Q_n{}^m]$ とおくと $Q_j{}^m$ は次のように解釈できる．その他の条件が一定として p_j が $\varDelta p_j$ だけ変化したとする．この時固定ウエイトの (A. M. P.)～(J. M. P.) を通じて各家計に配分される所得 $\hat{y}^m$ は一般に y^m に一致しない．$\varDelta p_j\to 0$ とすると

$$\lim_{\varDelta p_j\to 0}\frac{\hat{y}^m-y^m}{\varDelta p_j}=Q_j{}^m$$

が成立するから，$Q_j{}^m$ は $\varDelta p_j$ によって生ずる所得配分の誤りの度合を示す項である．然し，(A. M. P.) の予算条

件によって $\sum \hat{y}^m = \sum y^m = y$ であるから

$$\sum_m Q_j{}^m = 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

$$\sum_m Q^m = 0 \qquad (4.17)$$

(4.16) と (4.17) によって

$$\frac{\lambda_p}{\lambda} = \sum_m \frac{y^m}{\eta^m} \left(\frac{\beta_p{}^m}{\beta^m} \right) \Big/ \sum_m \frac{y^m}{\eta^m} \qquad (4.18)$$

また (2.18) によって

$$\frac{\beta_p{}^m}{\beta^m} = -\left\{ \left(\frac{\partial x^m}{\partial y^m} \right) + \frac{\eta^m}{y^m} (x^m)^T \right\} \qquad (4.19)$$

(4.18), (4.19) を MPC (限界消費性向) をタームにして書き改めると

$$\frac{\beta_p{}^m}{\beta^m} = -(MPC^m + \eta^m \alpha^m) \hat{p}^{-1} \qquad (4.20)$$

$$\frac{\lambda_p}{\lambda} = -(\overline{MPC} + \eta \alpha) \hat{p}^{-1} \qquad (4.21)$$

ただし,

$$MPC_j{}^m = p_j \frac{\partial x_j{}^m}{\partial y^m} \qquad MPC^m = [MPC_1{}^m, \cdots, MPC_n{}^m]_{1 \times n}$$

$$\frac{p_j x_j{}^m}{y^m} = \alpha_j{}^m \qquad \alpha^m = [\alpha_1{}^m, \cdots, \alpha_n{}^m]_{1 \times n}$$

$$\begin{bmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{bmatrix} = \hat{p}$$

$$\overline{MPC} = \frac{\sum_m (MPC^m)\dfrac{y^m}{\eta^m}}{\sum_m \dfrac{y^m}{\eta^m}} \equiv [\overline{MPC}_1, \cdots, \overline{MPC}_n]_{1\times n}$$

$$\alpha = \left[\frac{p_1 x_1}{y}, \cdots, \frac{p_n x_n}{y}\right] \qquad \eta = 1 \Big/ \sum_m \left(\frac{1}{\eta^m}\right)\left(\frac{y^m}{y}\right)$$

(4.20), (4.21) を (4.16) に代入して Q^m の計算式がえられる.

$$Q^m = \frac{y^m}{\eta^m}(MPC^m - \overline{MPC} + \eta^m \alpha^m - \eta\alpha)\hat{p}^{-1} \qquad (4.22)$$

(4.22) を (4.15) に代入することにより，誤差率 (4.11) の計算式が出来上がる.

$$\frac{\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_T - \left(\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_{\text{A.M.P.}}}{\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_T} = \frac{-\sum_m \left(\dfrac{MPC_j{}^m - \overline{MPC}_i}{\alpha_i}\right)\left(\dfrac{MPC_j{}^m - \overline{MPC}_j}{\alpha_j} + \dfrac{\eta^m \alpha_j{}^m - \eta\alpha_j}{\alpha_j}\right)\dfrac{y^m}{y\eta^m}}{(e_{ij}/\alpha_i)} \qquad (4.23)$$

ただし,

$$e_{ij} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)_T \frac{p_j}{\sum x_i{}^m}$$

(4.23) にみるように，限界消費性向と money flexibility の家計間のばらつきが誤差の主要因になっている.

5. J. Muellbauer の需要関数体系について

5.1 “代表的消費者”の定式化

“代表的消費者”の概念は経済分析の各分野で広く使われているが，最近発表された Muellbauer〔9〕,〔10〕による定式化を除けばこの概念は恣意的に使われているようである．Muellbauer が与える影響は非常に大きい．第4節で述べたように市場における集計的行動が特定の選好をもった単一の消費者で代表されるかどうかは経験的に検証されねばならぬ仮説である．然し時系列的な市場データを基にして需要関数体系を推定する場合，面倒な集計問題を回避するために次のようなアプローチを採ることが多い．

各財の集計的消費量や所得を1人当たりに平均化することによって，それらの諸変量の変動は理想的な消費者の行動によって説明しうるものと想定することである．Muellbauer によって明らかにされた点であるが，代表的消費者を想定して集計問題を回避するということは，言い換えれば，そうすることが出来るようなふさわしい需要関数体系を選択することである．

需要体系を選択する場合には普通は (イ) $\sum p_i x_i = y$ という予算条件 (ロ) 所得と価格についての0次同次性 (ハ) 代替項の対称性 (ニ) 所得弾力性がすべて1とならぬ（効用関数が同次性をもたぬ）などの条件を満たすことを要請するが，これらの4条件に加えて集計問題を考慮するとなれば需要体系の選択範囲は更に狭くなる．

Muellbauer による“代表的消費者”の定式化は消費者物価指数，消費者余剰などに関する議論にも影響する．今日物価問題の中で消費者物価指数の代表性がしばしば取りあげられるが，“代表的消費者”の概念と関連した問

題である．ラスパイレス型の価格指数は価格比を budget Share で加重平均したものである．基準時点，比較時点の価格ベクトルをそれぞれ p^b, p^a とすると

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k{}^b p_k{}^a}{\sum_{k=1}^{n} x_k{}^b p_k{}^b} = \sum_k \overline{W}_k{}^b \left(\frac{p_k{}^a}{p_k{}^b}\right)$$

ただし，

$$\overline{W}_k{}^b = \frac{x_k{}^b p_k{}^b}{\sum_k x_k{}^b p_k{}^b} = \frac{\sum_{m=1}^{M} W_{km}{}^b y_m{}^b}{\sum_m y_m{}^b}$$

budget Share $\overline{W}_k{}^b$ は各家計の budget Share $W_{km}{}^b$ を総支出額 $y_m{}^b$ で加重した平均値である．従って消費者物価指数の代表性は平均の budget Share $\overline{W}_k{}^b$，$k=1,2,\cdots,n$ の代表性を意味しているわけであるが，この代表性について意味のある議論を展開するためには，各家計毎に W_{km} と (y_m, p) の間にシステマティクな関係 $W_{km}=W_{km}(y_m, p)$，$k=1,2,\cdots,n$ のあることが前提されねばならない．この関数が 0 次同次性，その他適当な条件を満たせば，以下で紹介するように $(\overline{W}_1, \overline{W}_2, \cdots, \overline{W}_n)$ に対して代表的所得水準 y_0 を対応づけることができる．

従ってこの場合には消費者物価指数は所得水準 y_0 をもつ代表的家計の価格指数に相当するわけである．

Condition RNNM

消費者mの所得を y_m，財 i の購入量を x_{im}．budget Share と (y_m, p) の間にシステマティクな関係を前提し

て，その関係を次のように表わす．

$$W_{im}=W_{im}(y_m,p) \qquad i=1,2,\cdots,n$$
$$m=1,2,\cdots,M$$

ただし，

$$W_{im}=p_i x_{im}/y_m$$

ここでは，消費者は効用を最大化する合理的消費者である必要はないが，関数 $W_{im}(\cdot)$ は (y_m,p) について0次同次の連続関数とする．財 i の集計的な budget Share を $\bar{W}_i$ とおく．

$$\bar{W}_i=\sum_m W_{im}y_m/\sum_m y_m=p_i\sum_m x_{im}/\sum_m y_m$$

すべての　$y=(y_1,y_2,\cdots,y_M)$ について，$\bar{W}_i$ を

$$\bar{W}_i=W_i(y_0,p) \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (5.1)$$

と表わせるような，ある所得水準 y_0 が存在する—— y_0 は (y,p) に依存するからある関数 $y_0=y_0(y,p)$ が存在する，という条件を Condition RNNM と記すことにする．ただし $\bar{W}_i(\cdot)$ は個別の $W_{im}(\cdot)$ と同じく0次同次の連続関数とする．そうすると y_0 は $(\bar{W}_1,\bar{W}_2,\cdots,\bar{W}_n)$ に対応する平均的所得に当たるが，このような y_0 が常に定義できるわけでない．Condition RNNM が成立するため必充条件は Muellbauer〔10〕が明らかにしたところによると (5.2) が成立することである．

マクロの条件

$$\frac{\partial \overline{W}_i}{\partial y_0} \Big/ \frac{\partial \overline{W}_j}{\partial y_0} = A_{ij}(p) \qquad i,j=1,2,\cdots,n \qquad i \neq j \qquad (5.2)$$

つまり，左辺の比が y_0 に依存せぬ，という条件である．

(5.2) の条件は次のように表現することができる．(5.2) と (5.3) はお互いに同等である．

$$\overline{W}_i = v(y_0, p)A_i(p) + D_i(p) \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (5.3)$$

ただし，

$$A_{ij} = A_i/A_j \qquad \sum_i A_i = 0 \qquad \sum D_i = 1$$

v, A_i, D_i は同次性の制約をもっている

(5.3) によれば

$$\overline{W}_i = A_{ij}\overline{W}_j + (D_i - A_{ij}D_j) \qquad i,j=1,2,\cdots,n \qquad i \neq j$$

であるから，上記の必充条件は $\overline{W}_i(\cdot, p)$ と $\overline{W}_j(\cdot, p)$ の間には従属関係があることを意味している．

(5.2) あるいは (5.3) はマクロの条件であるが， Condition RNNM が成立するためには個別の $W_{im}(\cdot)$ について次の条件（ミクロの条件）の成立が必要且つ充分であることが証明されている．

ミクロの条件

$$W_{im} = v_m(y_m, p)A_i(p) + D_i(p) + \frac{C_{im}}{y_m} \qquad \begin{array}{l} i=1,2,\cdots,n \\ m=1,2,\cdots,M \end{array} \qquad (5.4)$$

ただし，

$$\sum_m C_{im}=0 \qquad i=1,2,\cdots,n$$

従って (5.3) の y_0 は次の (5.5) で与えられることになる.

$$y_0=v^{-1}\left(\frac{\sum_m y_m v_m(y_m,p)}{\sum_m y_m}\right) \qquad (5.5)$$

y_0 は所得分布 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_M)$ と p に依存するものとされているが，応用上で重要なのは y_0 が p と独立になる場合である．このケースを PiGL と区別して記すと，PiGL が成立するケースは次の条件が満たされる場合に限られることが証明されている.

マクロの条件における $v(y_0,p)$ が

$$v(y_0,p)=y_0{}^{-\alpha} \qquad (5.6)$$

あるいは

$$v(y_0,p)=\log y_0 \qquad (5.7)$$

となること．ミクロの条件については

$$v_m(y_m,p)=\left(\frac{y_m}{K_m}\right)^{-\alpha} \qquad (5.8)$$

あるいは

$$v_m(y_m,p)=\log\left(\frac{y_m}{K_m}\right) \qquad (5.9)$$

ただし,

K_m はある常数項

が成立することである．従って PiGL が成立する場合には

$$y_0=\left(\sum_m K_m{}^{\alpha} y_m{}^{1-\alpha}/\sum y_m\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \qquad (5.10)$$

あるいは

$$y_0=\exp\left[\frac{\sum_m y_m \log\left(\frac{y_m}{K_m}\right)}{\sum_m y_m}\right] \qquad (5.11)$$

となる．

Condition RNNM においては，各消費者が効用最大化を計る合理的消費者であるとは前提されていないから，y_0をもつ代表的消費者がどのような効用関数をもつかは問題にならない．然しわれわれが代表的消費者という概念を使う場合には財の選択に関して特定の選好をもつ消費者を想定するから，そのためには Condition RNNM による特徴づけは不充分である．そこでこの条件に代わって次の Condition R を設ける．

Condition R

まず，消費者の選好を支出関数で表現する．各消費者の支出関数と需要関数（c. d. f.）をそれぞれ次のように表わす．

支出関数　$y_m=E^m(u_m, p)$

c. d. f.　$x_{im}=g_i{}^m(u_m, p) \qquad m=1, 2, \cdots, M$

$$i=1,2,\cdots,n$$

支出関数は第2節の Appendix にあげた (a)〜(d) の性質をもつものとする．需要関数を budget Share をタームにした体系にかえると

$$W_{im}=\frac{p_i x_{im}}{y_m}=\frac{\partial \log E^m(u_m, p)}{\partial \log p_i} \qquad \begin{matrix} m=1,2,\cdots,M \\ i=1,2,\cdots,n \end{matrix} \qquad (5.12)$$

ただし，

$$y_m\equiv\sum_i p_i x_{im}=E^m(u_m, p)$$

M 個の支出関数が与えられると，集計的な budget Share $\overline{W}_i$ は

$$\overline{W}_i=\sum_m y_m W_{im}/\sum_m y_m$$

ただし，

$$W_{im}=(5.12)$$

すべての $(u_1, u_2, \cdots, u_M, p)$，従ってすべての $y=(y_1, y_2, \cdots, y_M)$ について $\overline{W}_i$ を

$$\overline{W}_i=\frac{\partial \log E(u_0, p)}{\partial \log p_i} \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (5.13)$$

と表わせるようなある関数 $E(u_0, p)$ が存在するならば Condition R が成立すると呼ぶ．ただし，$E(\cdot)$ は個別の支出関数 $E^m(\cdot)$ と同様の性質を備えていなければならない．Condition R のもとでは u_0 は $(u_1, u_2, \cdots, p)$ に依存するから $u_0=u_0(u_1, u_2, \cdots, p)$ であるが，u_0 は代表的消費者の効用水準を示すものと考えられる．$y_0=E(u_0, p)$

によって代表的消費者の所得水準が定まる．

Condition R が成立する場合には (5.13) の $\overline{W}_i$ を $\overline{W}_i = W_i(y_0, p)$ と表わせるから，常に Condition RNNM が成立する（この逆は必ずしも成立しない）．従って Condition RNNM のもとで導かれた (5.2)～(5.11) 等の諸定理は当然 Condition R の場合に適用できる．Condition R は budget Share についての条件づけであるが，数量について Condition R を定義したとすれば次のような条件になるであろう．

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{m=1}^{M} x_{im}}{M}, \quad x_{im} = g_j^{m}(u_m, p)$$

とおいて，すべての $(u_1, u_2, \cdots, p)$ について $\bar{x}_i$ が

$$\bar{x}_i = \frac{\partial E(u_0, p)}{\partial p_i} \qquad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (5.14)$$

と表わせるようなある支出関数 $E(u_0, p)$ が存在するという条件（Condition R′ と記す）になろう．然し次に示すように，数量についての Condition R′ は budget Share についての Condition R のもとで $y_0 = \frac{\sum_m y_m}{M} = \bar{y}$ が成立するという条件と同等である．

∵ Condition R が成立し，$y_0 = \bar{y}$ とすると，$E(\cdot)$ は p について一次同次だから

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial E(u_0, p)}{\partial p_i} = E(u_0, p) = y_0$$

$$= \bar{y} = \sum_i p_i \bar{x}_i$$

すべての p について成立するから

$$\bar{x}_i=\frac{\partial E(u_0,p)}{\partial p_i} \qquad i=1,2,\cdots,n$$

逆も同じ要領で証明される.

このように Condition R′ は Condition R の特別なケースになっているわけであるが, Condition R のもとで $y_0=\bar{y}$ が成立する支出関数のクラスを吟味すると,

集計的支出関数が

$$E(u_0,p)=a(p)+u_0b(p) \qquad (5.15)$$

個別の支出関数が

$$E^m(u_m,p)=a_m(p)+u_mb(p) \qquad (5.16)$$

ただし,

$$\sum_m a_m(p)=a(p), \qquad u_0=\sum_m u_m/M$$

$a(p)$, $b(p)$, およびすべての $a_m(p)$ は一次同次の凹関数

と表わせる場合に限られてしまうことが判る.

(5.16) は各消費者のエンゲル曲線が直線となることと同等である.

Muellbauer〔10〕によって Condition R が成立するための条件が導かれているが, 次の通り.

$$E(u_0,p)=G(u_0,H(p))B(p) \qquad (5.17)$$

$$E^m(u_m,p)=G^m(u_m,H(p))B(p)+g^m(p) \qquad m=1,2,\cdots,M \qquad (5.18)$$

ただし，

Bは一次同次，Hは0次同次の関数

Gは u_0 について単調増加

$$\sum_{m=1}^{M} g^m(p)=0$$

マクロの条件として (5.17)，ミクロの条件として (5.18) が成立することが必要且つ充分である．Condition R のもとで，PiGL が成立するのは支出関数が次のようなクラスの関数である場合に限られる．

マクロの条件

$$E(u_0, p)=(a(p)^\alpha+u_0 b(p)^\alpha)^{1/\alpha} \qquad (5.19)$$

あるいは

$$E(u_0, p)=H(p)^{u_0}B(p) \qquad (5.20)$$

ただし，

$a(p), b(p), B(p)$ はいずれも一次同次

$H(p)$ は0次同次

ミクロの条件

(5.19) に対して　$E^m(u_m, p)=K_m(a(p)^\alpha+u_m b(p)^\alpha)^{1/\alpha}$　(5.21)

(5.20)　〃　$E^m(u_m, p)=K_m H(p)^{u_m}B(p)$　(5.22)

なお，(5.19) と (5.21) の支出関数は次のように変形できる．b^α を $c^\alpha-a^\alpha$ で置き換えて

$$E^{\alpha}=a^{\alpha}(1-u_0)+u_0c^{\alpha} \qquad (5.23)$$

ただし，

$c(p)$ は一次同次関数で，$c(p)>a(p)$ とする

(5.23) のように変形しておくと，α の正負に関係なく $\partial E/\partial u>0$ が確保できる（支出関数として持つべき性質）.

(5.23) をさらに変形すると

$$\frac{E^{\alpha}-1}{\alpha}=\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha}+u_0\left\{\frac{c^{\alpha}-1}{\alpha}-\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha}\right\}$$

$\alpha\to 0$ の極限を求めると

$$E=a(p)\left(\frac{c(p)}{a(p)}\right)^{u_0} \qquad (5.24)$$

(5.24) において $c(p)/a(p)\equiv H(p)$, $a(p)=B(p)$ と書き改めると，(5.20) の型の支出関数がえられる．従って，(5.20) 型の支出関数は (5.21) 型の極限形に相当することが判る.

個別の支出関数が (5.21), (5.22) で与えられたとすると，(2.13) によって，それぞれに対応する需要関数 (b. s. f.) が導ける.

$\boldsymbol{E}^{m}(\boldsymbol{u}_m,\boldsymbol{p})=\boldsymbol{K}_m(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{p})^{\alpha}+\boldsymbol{u}_m\boldsymbol{b}(\boldsymbol{p})^{\alpha})^{1/\alpha}$ の場合

$$W_{im}=\left.\frac{\partial\log E}{\partial\log p_i}\right|_{u_m=V(y_m,p)} \qquad \begin{array}{l} i=1,2,\cdots,n \\ m=1,2,\cdots,M \end{array}$$

$$=\left(\frac{y_m}{K_m}\right)^{-\alpha}a^{\alpha}(a_i-b_i)+b_i \qquad (5.25)$$

ただし，

$$a_i \equiv \frac{\partial \log a(p)}{\partial \log p_i} \qquad b_i \equiv \frac{\partial \log b(p)}{\partial \log p_i}$$

従って

$$\overline{W}_i = \frac{\sum_m W_{im} y_m}{\sum_m y_m} = y_0^{-\alpha} a^{\alpha}(a_i - b_i) + b_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (5.26)$$

ただし，

$$y_0 = \left\{ \sum_m K_m{}^{\alpha} y_m{}^{1-\alpha} / \sum_m y_m \right\}^{-1/\alpha} \qquad (5.27)$$

(5. 26) が (5. 3) に相当する関数であるが，$a(p), b(p)$ を特定化することにより (5. 3) の $A_i(p), D_i(p)$ の関数型が具体的に定まってくるわけである．

$E^m(u_m, p) = K_m \left(\frac{c(p)}{a(p)} \right)^{u_m} a(p)$ の場合

$$W_{im} = \left[\frac{\log\left(\frac{y_m}{K_m}\right) - \log a}{\log (c/a)} \right] (c/a)_i + a_i \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \cdots, n \\ m = 1, 2, \cdots, M \end{matrix} \qquad (5.28)$$

ただし，

$$(c/a)_i = \frac{\partial \log (c/a)}{\partial \log p_i}$$

$$\overline{W}_i=\left[\frac{\log y_0-\log a}{\log(c/a)}\right](c/a)_i+a_i \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (5.29)$$

ただし，

$$y_0=\exp\left[\frac{\sum_m y_m \log\left(\frac{y_m}{K_m}\right)}{\sum_m y_m}\right]$$

5.2　Muellbauer の需要関数体系の特徴

(5.21) 型の支出関数によって生成される需要体系に注目してみよう．

(イ)　各消費者の支出関数の相違を示す項は常数項の K_m だけであるから，この項を除けば各消費者の選好はお互いに同一である．従って PiGL が成立するケースのもとでは極めて限られた選好の差しか考慮できない．個別消費者が家計である場合には，この K_m を Muellbauer は所得者数からみた家計の規模を示すパラメータと解釈している．

(5.21) 型の支出関数からえられる集計的な需要関数（b. s. f.）を

$$\overline{W}_i=y_0^{-\alpha}A_i(p)+D_i(p) \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (5.30)$$

ただし，

$$\sum_{i=1}^{n}A_i(p)=0 \qquad \sum_{i=1}^{n}D_i(p)=1$$

と表わすと，(5.27) にみるように y_0 は所得分布に依存するから，(5.30) の需要体系は所得分布の変化の影響を明示的に評価できる体系になっている．例えば $\alpha=-1$ として，単純化のために $K_m=K,\ m=1,2,\cdots,M$ とすると

$$y_0=k_0\bar{y}$$

ただし，

$$k_0=\frac{1}{K}\left(1+\left(\frac{\sigma}{y}\right)^2\right) \qquad \sigma^2 \text{ は所得分布の分散}$$

となって，y_0 の分布への依存が平均 $\bar{y}$ と変異係数 (σ/y) で表現される．

(ロ) (5.30) の $A_i(p)$, $D_i(p)$ の関数型は既に述べたように支出関数の $a(p)$, $b(p)$ を特定することによって具体的に定まってくる．$a(p), b(p)$ はいずれも一次の同次関数であるが，次に述べるように支出関数と双対的な効用関数を導出し，それを観察することにより，この二つの関数の性格を明確にすることが出来る．

最初に (5.17) の支出関数に双対的な効用関数を導出してみよう．

$$H(p)B(p)\equiv a(p) \qquad B(p)=b(p)$$

とおいて，(5.19) を変形すると

$$E(u_0,p)=G(u_0,H(p))B(p)=G(u_0,a/b)b=\overline{G}(u_0,a(p),b(p)) \qquad (5.31)$$

双対的な効用関数を $u=f(x)$ とおくと，次式で与えられることが証明できる．

$$u=f(x)=\underset{x_1,x_2}{\mathrm{Max}}\{F(\phi^1(x_1),\phi^2(x_2))\,|\,x_1+x_2=x\} \qquad (5.32)$$

ただし，

x_1, x_2 はいずれも n 次のベクトル

$F(\cdot)$ は二財についての効用関数

$\phi^1(\cdot),\ \phi^2(\cdot)$ は一次同次関数

(5.32) の読み方であるが，$\phi^1(\cdot),\ \phi^2(\cdot)$ をそれぞれ生産関数とみなし，産出される中間財を z_1, z_2 とすると，$f(x)$ は (z_1, z_2) の効用 $F(z_1, z_2)$ を最大にするように投入財 x を二つの生産過程に配分した結果えられる最大効用であると解釈できよう．

(証明)

まず，(5.32) で与えられた効用関数の支出関数を求めると

$$\begin{aligned}E(u_0, p) &= \operatorname*{Min}_{x}\{P^T x \mid f(x) \geq u_0\} \\ &= \operatorname*{Min}_{x_1, x_2}\{P^T \textstyle\sum x_k \mid F(\phi^1(x_1), \phi^2(x_2)) \geq u_0\} \\ &= \operatorname*{Min}_{z_1, z_2}\left\{\sum_{k=1}^{2} \operatorname*{Min}_{x_k}\{p^T x_k \mid \phi^k(x_k) \geq z_k\} \mid F(z_1, z_2) \geq u_0\right\}\end{aligned}$$

$\operatorname*{Min}_{x_k}\{p^T x_k \mid \phi^k(x_k) \geq z_k\}$ は一次同次の生産関数の費用関数であるから

$$\operatorname*{Min}_{x_k}\{p^T x_k \mid \phi^k(x_k) \geq z_k\} = \alpha^k(p) z_k \qquad k = 1, 2$$

ただし，

$\alpha^k(p)$ は一次同次の凹関数

と表わされる．$\alpha^k(p)$ は単位当たり費用関数である．従って

$$E(u_0, p)=\underset{z_1, z_2}{\mathrm{Min}}\left\{\sum_{k=1}^{2}\alpha^k(p)z_k \,\middle|\, F(z_1, z_2)\geq u_0\right\}$$

上式の右辺は効用関数 $F(z_1, z_2)$ の支出関数に他ならない．$F(\cdot)$ の支出関数を $G(u, \cdot)$ とおけば

$$E(u_0, p)=G(u, \alpha^1(p), \alpha^2(p)) \qquad (5.33)$$

ただし，

$\alpha^1(p), \alpha^2(p)$ は一次同次の凹関数

逆に支出関数が (5.33) で与えられたとしよう．(5.33) より間接的効用関数（基準化された価格をタームにして）$V(p/y)$ を導くと

$$V(p/y)=V(\alpha^1(p/y), \alpha^2(p/y))=V(\alpha^1(p^*), \alpha^2(p^*))$$

ただし，

$$p^*=p/y$$

(2.20) の公式を用いて

$$\begin{aligned}u=f(x)&=\underset{p^*}{\mathrm{Min}}\{V(p^*)\,|\,(p^*)^T x\leq 1\}\\&=\underset{p^*}{\mathrm{Min}}\{V(\alpha^1(p^*), \alpha^2(p^*))\,|\,(p^*)^T x\leq 1\}\\&=\underset{x_1, x_2}{\mathrm{Max}}\{\underset{p^*}{\mathrm{Min}}\{V(\alpha^1(p^*), \alpha^2(p^*))\,|\,(p^*)^T\textstyle\sum x_k\leq 1\}\,|\,\sum_k x_k\leq x\}\end{aligned}$$

ここで

$$\operatorname*{Max}_{p^*}\{z_k \mid \alpha^k(p^*)z^k \leq (p^*)^T x_k\} \equiv \phi^k(x_k) \qquad k=1,2$$

とおく．$\phi^k(\cdot)$ は $\alpha^k(\cdot)$ を単位当たり費用関数にもつ生産関数に他ならない（(2.19) を参照)．この $\phi^k(\cdot)$ を用いると

$$\operatorname*{Min}_{p^*}\{V(\alpha^1(p^*), \alpha^2(p^*)) \mid (p^*)^T \sum x_k \leq 1\} = \operatorname*{Min}_{\alpha^1, \alpha^2}\{V(\alpha^1, \alpha^2) \mid \sum_k \phi^k(x_k)\alpha^k \leq 1\}$$

再び (2.20) の公式を用いると，右辺は間接的効用関数 $V(\alpha^1, \alpha^2)$ と双対的な効用関数に相当することが判る．この効用関数を $F(\cdot)$ と記すと

$$\operatorname*{Min}_{\alpha_1, \alpha_2}\{V(\alpha^1, \alpha^2) \mid \sum \phi^k(x_k)\alpha^k \leq 1\} = F(\phi^1(x_1), \phi^2(x_2))$$

と表わせる．以上をまとめると，求むる $f(x)$ は次式で与えられる．

$$u = f(x) = \operatorname*{Max}_{x_1, x_2}\{F(\phi^1(x^1), \phi^2(x^2)) \mid x_1 + x_2 \leq x\} \qquad (5.34)$$

ただし，

$\phi^1(\cdot), \phi^2(\cdot)$ はそれぞれ $\alpha^1(p), \alpha^2(p)$ を単位当たり費用関数にもつ一次同次の生産関数

$F(\cdot)$ は $G(\cdot)$ を支出関数にもつ効用関数

（証明終わり）

以上の展開で明らかにされたように，支出関数 (5.31) の $a(p), b(p)$ はそれぞれ中間財 z_1, z_2 を産出するための単位当たり費用あるいは中間財の隠伏的価格を表示するものと意味づけることができる．この点を特に PiGL が成立する場合について詳しく調べてみる．

$$E(u_0, p) = \widetilde{G}(u_0, a(p), b(p)) = (a(p)^\alpha + u_0 b(p)^\alpha)^{1/\alpha}$$

の場合には

$$W_i=(a/y)^\alpha(a_i-b_i)+b_i=(a/y)^\alpha a_i+(1-(a/y)^\alpha)b_i \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{5.35}$$

ただし，

$$a_i=\frac{\partial \log a(p)}{\partial \log p_i} \qquad b_i=\frac{\partial \log b(p)}{\partial \log p_i}$$

$a(p), b(p)$ はそれぞれ単位当たり費用（支出）関数だから，a_i, b_i はそれぞれ中間財 z_1, z_2 の生産における財 i の支出割合にほかならない（(2.12) を参照）. a_i と b_i を $(a/y)^\alpha$, $1-(a/y)^\alpha$ という重みをつけて結びつけたものが (5.35) の W_i である.

(5.35) で $y=a$ とすると $W_i=a_i$. $\alpha>0$ として，$y\to\infty$ とすると $W_i=b_i$ だから，z_1 は基本財あるいは消費者が財に対して欲求する基本的特性，z_2 は奢侈的財（特性）の産出レベルを表わすものと解釈できよう．つづいて PiGL が成立する場合の効用関数を求めてみる.

PiGL が成立する場合の効用関数

$E(u_0, p)=H(p)^{u_0}B(p)=a(p)^{u_0}b(p)^{1-u_0}$ の場合

ただし，$HB\equiv a, \quad B\equiv b$

この場合には

$$G(u,a,b)=a^u b^{1-u}$$

支出関数の性質（d）を用いて $G(\cdot)$ に双対的な効用関数 $F(z_1, z_2)$ を求めると

$$z_1=\frac{\partial G}{\partial a}=u\frac{G}{a} \qquad z_2=\frac{\partial G}{\partial b}=(1-u)\frac{G}{b}$$

従ってすべての $a>0$，$b>0$ について次式が成立する．

$$\left(\frac{z_1}{u}\right)^u\left(\frac{z_2}{1-u}\right)^{1-u}=1 \qquad (5.36)$$

(5.36) によって隠伏的に定義される関数 $F(z_1, z_2)$ が $G(\cdot)$ と双対的な効用関数である．$a(p)$，$b(p)$ をそれぞれ単位当たり費用関数にもつ一次同次の生産関数 $\phi^1(x_1), \phi^2(x_2)$ が与えられれば，(5.34) によって最終な効用関数 $f(x)$ が定まる．(5.34) の $F(\phi^1(x_1), \phi^2(x_2))$ は次式で定義される関数である．

$$\left(\frac{\phi^1(x_1)}{u}\right)^u\left(\frac{\phi^2(x_2)}{1-u}\right)^{1-u}=1$$

$E(u_0, p)=(a(p)^\alpha+u_0 b(p)^\alpha)^{1/\alpha}=((1-u_0)a^\alpha+u_0 c^\alpha)^{1/\alpha}$ の場合

ただし，

$$c(p)=a(p)+b(p)$$

この場合には

$$G(u, a, b)=((1-u)a^\alpha+ub^\alpha)^{1/\alpha}$$

前と同じ要領で，$G(u, a, b)$ と双対的な効用関数 $F(z_1, z_2)$ がえられる．次式によって隠伏的に定義される関数である．

$$(1-u)\left(\frac{z_1}{1-u}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}+u\left(\frac{z_2}{u}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}=1 \qquad (5.37)$$

(ハ) 第3節の3.2で，クロスセクショナルな家計分析を実行する場合の需要関数は，(3.22) あるいは (3.23) のクラスの中から選ぶべきことを強調した．所得要因と価格要因（従って世帯構成要因）とが分離されている，という利点をもつからであるが，これらの需要体系にはもう一つ大きな利点がある．5.1で述べたように PiGL が成立する体系であるという点である．集計的需要関数は個別需要関数と同じフォームとなり，代表的所得 y_0 が (5.10) あるいは (5.11) に従って与えられた点だけを注意すればよい．集計的な時系列データによる需要分析にクロスセクション分析の結果を利用する手続き——いわゆる時系列分析とクロスセクション分析の統合がしばしば行われるが，その際に留意すべきことは，両者を結合するためにはクロスセクショナルな家計分析に用いられる個別の需要関数体系と集計的な需要分析に用いられる集計的体系とがお互いに整合的でなければならぬ，という点である．この点を無視した計測例をよく見かけるが，お互いに整合的な体系を構成してからでなければ統合を行うべきでない．PiGL が成立する需要体系は家計間の選好の差を狭い範囲でしか扱えない，という欠点をもっているが，クロスセクショナルな家計分析を実行するための需要体系として推奨しうる体系である．

5.3 既存の需要関数体系の吟味

既存の体系の中でよく知られているものについて PiGL が成立しているかどうかを検討してみる．

ストーンの線形支出体系

$$効用関数=\sum_i \beta_i \log(x_i-r_i) \qquad \sum_i \beta_i=1$$

$$支出関数=T(u)b(p)+a(p)$$

$$ただし,\ b(p)=\prod_i p_i^{\beta_i} \qquad a(p)=\sum_i p_i r_i$$

$$T(\cdot)=任意の単調増加関数$$

各消費者の β_i（限界消費性向）がすべての消費者を通じて同一であれば，(5.16) によって Condition R における y_0 は $y_0=\bar{y}$ となる．この特別の場合を除けば Condition R は成立しない．

(5.26) をつかって PiGL が成立するように，線形支出体系を修正することが出来る．(5.26) の $a(p), b(p)$ を次のように特定化する．

$$a(p)=\sum p_i r_i \qquad b(p)=\Pi p_i^{\beta_i}$$

従って　$a_i=p_i r_i/\sum p_i r_i,\quad b_i=\beta_i$　となり

$$\overline{W}_i=\left(\frac{\sum p_i r_i}{y_0}\right)^{\alpha}\left(\frac{p_i r_i}{\sum p_i r_i}-\beta_i\right)+\beta_i \qquad i=1,2,\cdots,n \qquad (5.38)$$

(5.38) はストーンの線形支出体系の一つの拡張といえるだろう．

Houthakker の indirect addilog 体系

間接的効用関数が

$$u=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right)\left(\frac{y}{p_i}\right)^{\beta_i}$$

で与えられるから，(2.9) によって

$$W_i=\frac{p_i x_i}{y}=\alpha_i\left(\frac{y}{p_i}\right)^{\beta_i}\Bigg/\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\left(\frac{y}{p_j}\right)^{\beta_j}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

すべての消費者の選好が同一で，$\beta_i=\beta$，$i=1,2,\cdots,n$ の時に PiGL が成立するが，然しこの時の効用関数は同次になる．

Jorgensen と Lau の Indirect translog 体系

間接的効用関数が

$$\log u=\alpha_0+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\log p_i^*+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\beta_{ij}\log p_i^*\log p_j^*$$

ただし，

$$\beta_{ij}=\beta_{ji}\qquad p_i^*=p_i/y$$

で与えられるから，(2.9) によって

$$W_i=\frac{\alpha_i+\sum_j\beta_{ij}\log p_j^*}{\sum_i\alpha_i+\sum_i\sum_j\beta_{ij}\log p_j^*}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

上記の需要関数はパラメータの α_i,β_{ij} に関して0次同次であるから，次の条件をおいて基準化すると

$$\sum_i\sum_j\beta_{ij}=0$$

需要関数（b. s. f.）は

$$W_i=(\log y)A_i(p)+D_i(p)$$

ただし，

$$A_i(p)=-\sum_j \beta_{ij}/\sum_i \alpha_i+\sum_i\sum_j \beta_{ij}\log p_j$$

$$D_i(p)=(\alpha_i+\sum_j \beta_{ij}\log p_j)/\sum_i \alpha_i+\sum_i\sum_j \beta_{ij}\log p_j$$

明らかに $\sum_i A_i(p)=0$，$\sum_i D_i(p)=1$．各消費者が同一の間接的効用関数（$\sum\sum \beta_{ij}=0$）をもてば PiGL が成立し，集計的な需要関数（b. s. f.）は次式で与えられる．

$$\overline{W}_i=(\log y_0)A_i(p)+D_i(p)$$

ただし，

$$y_0=\left(\frac{M}{Z}\right)\bar{y}$$

M は消費者総数．Z は次式で定義される統計量である

$$\log Z=-\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{y^m}{y}\right)\log\left(\frac{y_m}{y}\right) \qquad \sum_m y_m=y$$

上式の右辺は所得分布のエントロピーを示している．$M\geq M/Z\geq 1$

代表的所得 y_0 は所得分布の不平等度（M/Z）が増大するほど $\bar{y}$ の上方に偏る．

Diewert の需要体系（Diewent〔4〕）

間接的効用関数が

$$u=\sum_i\sum_j \beta_{ij}p_i^{*\frac{1}{2}}p_j^{*\frac{1}{2}}+\sum_i \beta_{0i}\log p_i^*+\beta_{00}$$

ただし，

$$p_i{}^* = \frac{p_i}{y} \qquad \beta_{ij} = \beta_{ji} \qquad \sum_i \beta_{0i} = 0$$

で与えられて

$$W_i = yA_i(p) + D_i(p)$$

ただし，

$$A_i(p) \equiv \beta_{0i} / \sum_i \sum_j \beta_{ij} p_i^{\frac{1}{2}} p_j^{\frac{1}{2}} \qquad D_i(p) \equiv \sum_j \beta_{ij} p_i^{\frac{1}{2}} p_j^{\frac{1}{2}} / \sum_i \sum_i \beta_{ij} p_i^{\frac{1}{2}} p_j^{\frac{1}{2}}$$

明らかに $\sum_i A_i(p) = 0$，$\sum_i D_i(p) = 1$. 各消費者が同一の間接的効用関数をもてば PiGL が成立し，次の需要関数がえられる.

$$\overline{W}_i = y_0 A_i(p) + D_i(p)$$

ただし，

$$y_0 = k_0 \bar{y} \qquad k_0 = 1 + \left(\frac{\sigma}{y}\right)^2$$

参 考 文 献

〔1〕 Carlevaro, F., "A Note on a Class of Systems of Demand Function with No Interaction between income and Household Composition", *European Economic Review*, 8 (1976), pp. 87～89.

〔2〕 Carlevaro, F., "An Addition to the preceding Note of Professor Muellbauer", *European Economic Review*, 8 (1976), pp. 97～103.

〔3〕 Diamond, P. A. and D. L. Macfadden, "Some Uses of the Expenditure Functions in Public Finance", *Journal of Public Economics*, 3 (1974), pp. 3～21.

〔4〕 Diewert, W. E., "Application of Duality Theory", in M. J. Intrigator and D. A. Kendorick, eds., *Frontiers of Quantitative Economics*, Vol. 2, North-Holland, 1974.

〔5〕 Dixon, P. B., *The Theory of Joint Maximization*, North-Holland, 1975.

〔6〕 Gorman, W. W., "Tricks with Utility Functions", in M. J. Aartes and A. R. Nobay, eds., *Essays in Economic Analysis*, Cambridge, 1976.

〔7〕 Lancaster, K., "The Theory of Household Behavior: Some Foundation", *Annals of Economic and Social Measurement*, 4/1 (1975), pp. 5～21.

〔8〕 Muellbauer, J., "Household Composition; Engel curves and Welfare Comparisons between Households", *European Economic Review*, 5 (1974), pp. 103～122.

〔9〕 Muellbauer, J., "Aggregation, Income Distribution and Consurmer Demand", *Review of Economic Studies*, 42 (1975), pp. 525～543.

〔10〕 Muellbauer, J., "Community Preferences and The Representatioe Consumer", *Econometrica*, 44 (1976), pp. 979～999.

〔11〕 Muellbauer, J., "A comment on limited independence between Income Response and Household Composition", *European Economic Review*, 8 (1976), pp. 91～95.

（研　究　員）