

費用関数の特定化に関する考察

伊 藤 順 一

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| 1. はじめに | 4. 費用関数の必要十分条件が満たされるデータ範囲 |
| 2. 生産関数と費用関数の双対性 (duality) | |
| 3. TL, GL, EGCD, GSRQ 関数 | 5. 結 語 |

1. は じ め に

生産構造, または生産構造の変化を数量的に把握する場合, 生産関数, 費用関数あるいは利潤関数をその分析手段とする方法は, 農業部門に限らず多大な研究蓄積が存在する。

農業部門における生産関数の計測は, 従来 Cobb-Douglas (以下 CD) 関数でスペシファイすることが主流であったが, 生産要素間の代替関係, あるいはクロスセクションで異なる規模の経済性の計測といった点で, CD 関数よりはるかに任意性を有する translog (TL) 関数が, その後の実証分析に数多く登場してくるようになる。さらに, 生産関数と費用関数, 利潤関数の双対性理論の応用として, 費用関数, 利潤関数に TL 関数を適用し, 生産技術を解明する試みもなされている。

しかし, 筆者は TL 関数以外にも flexible な関数型⁽¹⁾が存在することを知り, 各関数の性質を十分把握した上で, 実証目的, データの性質に適合する関数型の選択が, 推計を実行する以前に必要であると考えた。

そこで本稿は, 生産関数と費用関数の双対性に関する理論的な整理を行なうとともに⁽²⁾, 推定段階における費用関数の優位性を確認しつつ, 費用関数の最適な特定化 (specification) について考察を加えることを課題とした。取り上げる関数型は, TL 関数のほか, generalized Leontief 関数 (GL), extended generalized Cobb-Douglas 関数 (EGCD), generalized square-root quadratic 関数 (GSRQ) である。なお, フーリエ級数の応用として最近開発された, seminonparametric な Fourier flexible form⁽³⁾ については, 別稿に譲る検討課題としたい。

注(1) 本稿でいう関数の flexibility とは, 代替の弾力性, 規模の経済性等にアプリオリな制約を課さないことを指す。厳密な定義は本稿第4節で行なう。

- (2) 利潤関数は生産関数が規模に関して収穫逓減の場合、あるいは固定的生産要素が存在する場合のみ定義できる。なお、生産理論における双対性は、利潤関数を含めて完全な体系をなすが、本稿では生産関数と費用関数の双対性についてのみ検討する。利潤関数と生産関数の双対性に関しては、L. J. Lau [23] を参照せよ。
- (3) Fourier flexible form については、J. A. Chalfant [9], I. Elbadawi *et al.* [14], A. R. Gallant [16], G. A. King [21], R. D. Pope [28], R. D. Weaver [33], M. K. Wohlgenant [34]などを参照されたい。

2. 生産関数と費用関数の双対性 (duality)

生産関数と費用関数の双対性 (duality) 理論は、シェファード (R. W. Shephard) を嚆矢とし、その後、ディーワート (W. E. Diewert), 宇沢弘文, マックファーデン (D. Mcfadden) 等により精緻な議論が展開された。

「生産関数がある条件を満足すれば、費用関数は生産技術の経済的に重要な全ての情報を集約している」。これが生産理論における双対性理論の端的な表現である。したがって、費用関数の計測をとおして費用構造を解明することは、同時にその費用構造を生み出している生産技術を、生産関数とは違った角度から眺めていることに他ならない。

いま要素価格ベクトルを $P=(P_1, P_2, \dots, P_n)$, 投入財ベクトルを $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 生産量を Y で表し、生産関数を $Y=F(X)$ と表現すると、費用関数 $C(P, Y)$ は

$$C(P, Y) = \min_i PX \\ s. t. \quad Y = F(X)$$

で定義され、最小費用を与える投入量 (X^*) は2階条件 (生産関数の準凹性) が満たされる限り存在する。また、条件付き要素需要関数は陰関数定理より $X^*=X(P, Y)$ と表現され、費用関数は要素価格と生産量の関数となる。また、費用関数は以下の性質を持つ。

- (i) 要素価格 P に関して非逓減
- (ii) 要素価格 P に関して1次同次
- (iii) 要素価格 P に関して凹
- (iv) 要素価格 P に関して連続

ところが、上記4つの条件を満足する関数 $C(P, Y)$ は、ある技術の費用関数になることが証明されている⁽¹⁾。換言すれば(i)~(iv)は費用関数の必要条件であると同時に、十分条件にもなっているのである。

さらに生産関数 $Y=F(X)$ と費用関数 $C(P, Y)$ より求められるいくつかの技術的指標、例えばアレン=宇沢の代替の弾力性 (σ_{ij})⁽²⁾, 規模に関する弾力性 (η), 技術進歩率

(λ) は以下のようにまとめられる⁽³⁾ (なお, 変数 t は技術進歩の指標としての時間,ギリシア文字のサブスクリプト 0 は生産関数, 1 は費用関数に対応する)。

$$\sigma_{ij0} = \frac{\sum F_i X_i}{X_i X_j} \cdot \frac{f_{ij}}{f} \qquad \sigma_{ij1} = \frac{CC_{ij}}{C_i C_j}$$

(ただし, F_i は $\partial F / \partial X_i$, f は F に関する縁付きヘシアン, f_{ij} は f のなかの f_{ij} 余因子を表す。以下 C_i は $\partial C(P, Y) / \partial P_i$, C_{ij} は $\partial^2 C(P, Y) / \partial P_i \partial P_j$ を表す。)

$$\eta_0 = \frac{k}{F(\mathbf{X}, t)} \cdot \frac{\partial F(k\mathbf{X}, t)}{\partial k} \Big|_{k=1} \qquad \eta_1 = \frac{C(P, Y, t)}{Y} \Big/ \frac{\partial C(P, Y, t)}{\partial Y}$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{F(\mathbf{X}, t)} \cdot \frac{\partial F(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \qquad \lambda_1 = -\frac{1}{C(P, Y, t)} \cdot \frac{\partial C(P, Y, t)}{\partial t}$$

$$\lambda_1' = \frac{1}{Y} \cdot \frac{dY}{dt} \Big|_{c(p, y, t) = \text{const. } p = \text{const}}$$

$$\sigma_{ij0} = \sigma_{ij1}$$

$$\eta_0 = \eta_1$$

$$\lambda_0 = \lambda_1' = \eta_1 \lambda_1$$

規模の経済性については上に示したとおりだが, 一般的には以下の SCE をその指標とする。

$$\text{SCE} = 1 - \frac{\partial \ln C}{\partial \ln Y} \leq 0 \qquad \begin{array}{l} \text{規模に関して収穫通減} \\ \text{一定} \\ \text{通増} \end{array}$$

注意を要するのは技術進歩率の値が主問題 (primal) と双対問題 (dual) で一般に異なり, 両者が一致するのは生産関数が 1 次同次の時に限る点である。

なお, 要素需要の価格弾力性 (ε_{ij}) は次式で与えられる。

$$\varepsilon_{ij} = S_j \sigma_{ij} \quad (\text{ただし, } S_j \text{ は } j \text{ 財のコストシェアを表す}) \dots\dots\dots (2.1)$$

また生産関数が homothetic (生産関数の homotheticity とは, H を連続かつ単調増加関数, G を 1 次同次関数とした場合, 生産関数 $Y = F(\mathbf{X})$ が $Y = H(G(\mathbf{X}))$ と表されることである) であると, 費用関数は生産量と要素価格が分離した関数として表現され

$$C(P, Y) = H^{-1}(Y) \phi(P) \quad (H^{-1} \text{ は } H \text{ の逆関数}) \dots\dots\dots (2.2)$$

となる⁽⁴⁾。これは, 生産関数と費用関数との双対性理論において重要な性質のひとつである。

さらに生産関数が k 次同次の場合, 費用関数は

$$C(P, Y) = Y^{1/k} \phi(P) \dots\dots\dots (2.3)$$

と表現される。

以上の数式展開より生産の技術構造を把握する際、生産関数、費用関数のいずれを用いても、得られる情報量は変わらないことが確認された。したがって、実証分析においては2つの道具を択一的に選択すればよいことになる。これは推定における技術上の問題、あるいは data availability に依存する問題である。

実証分析における費用関数の利点を以下にまとめてみた。

- (i) 生産要素価格を外生変数として捉えることが、現実的に許容されるため、生産関数の推定が常に抱える同時推定バイアスの問題を回避できる。
- (ii) 代替の弾力性の計算が容易である。
- (iii) シェファードの補題より条件付き要素需要関数の導出が容易である。
- (iv) タイムシリーズデータにより、技術進歩の偏向性を計測する場合、要素拡大的 (factor augmenting) な生産関数を仮定することなく推計が可能である⁽⁵⁾。

以上の点を考慮して、本稿では費用関数を取り上げ、その特定化を中心に話を進めてみたい。

注(1) H. R. Varian [32] 第1章, H. Uzawa [31] を参照。またミクロ経済学全般にわたる双対性理論については, W. E. Diewert が [13] で包括的な議論を展開している。

(2) 代替の弾力性は、アレン＝宇沢の代替の弾力性に限らず、実に様々な概念が存在する。実際にそれらを計測している例として, V. E. Ball and R. G. Chambers [2] を挙げることができる。

(3) 生産関数と費用関数より求められる技術的指標については, M. Ohta [27] および R. Sato and T. Koizumi [30] を参照。

(4) (2.2) 式の簡単な証明は以下で示される。

費用最小化問題のラグランジュ関数を $L = \mathbf{P}\mathbf{X} + \lambda(Y - H(G(\mathbf{X})))$ とすると、最小化問題の1階条件は

$$P_i - \lambda(\partial H / \partial G)(\partial G / \partial X_i) = 0 \dots\dots\dots ① \quad Y - H(G(\mathbf{X})) = 0 \dots\dots\dots ②$$

($i=1, 2, \dots, n$) となり, $C(\mathbf{P}, Y)$ は

$$C(\mathbf{P}, Y) = \sum P_i X_i = \lambda(\partial H / \partial G) \sum (\partial G / \partial X_i) X_i = \lambda(\partial H / \partial G) G = \lambda H' G \dots\dots\dots ③$$

と表現される。②, ③式をYで微分すると,

$$1 = H'(\partial G / \partial Y) \dots\dots\dots ④$$

$$\partial C / \partial Y = \lambda = (\partial \lambda / \partial Y) H' G + \lambda(\partial H' / \partial Y) G + \lambda H'(\partial G / \partial Y) \dots\dots\dots ⑤$$

が導出され、④式を⑤式へ代入すると

$\lambda = (\partial \lambda / \partial Y) H' G + \lambda(\partial H' / \partial Y) G + \lambda$ をえる。さらに $G \neq 0$ とすると $(\partial \lambda / \partial Y) H' + \lambda(\partial H' / \partial Y) = 0$ となり, $\partial(\lambda H') / \partial Y = 0$ が成立する。すなわち, $\lambda H'$ はYの関数でないことが証明された。したがって③式は以下⑥式のように書き改めることが

できる。

$$C(P, Y) = \phi(P)G \dots\dots\dots \textcircled{6}$$

最後に $G = G(X(P, Y))$ が Y だけの関数であることを示せばよい。費用関数のヘシアンが対称行列であることを利用しつつ、 G を任意の要素価格 P_k で微分すると $\partial G / \partial P_k = \sum_j (\partial G / \partial X_j) (\partial X_j / \partial P_k) = \sum_j (\partial G / \partial X_j) (\partial X_k / \partial P_j) \dots\dots\dots \textcircled{7}$

となる。①, ⑦両式と要素需要関数の P に関する 0 次同次性より

$$\partial G / \partial P_k = \sum_j (P_j / \lambda H') (\partial X_k / \partial P_j) = (1 / \lambda H') \sum_j (\partial X_k / \partial P_j) P_j = 0 \text{ が成立し、} G \text{ は}$$

P の関数でないことが証明された。よって (2.2) 式が成立する。

- (5) この利点は推定技術上のメリットというよりは、むしろ「不可能性定理」をめぐる経済理論の問題である。詳しくは、R. Sato [29], または茅野 [36] を参照せよ。

3. TL, GL, EGCD, GSRQ 関数

繰り返しになるが、flexible function form (FFF) は CD および CES 関数⁽¹⁾に比べ、その名のとおり任意性の強い関数型で、それらを生産関数、費用関数あるいは利潤関数に適用した場合、計測によって得られる代替の弾力性、規模の経済性等に先験的な制約を課することがない。FFF の開発はその任意性ゆえ、従来の CD, CES 関数でスペシファイしたのでは、解明することが技術的に困難と見なされてきた経済的指標への数量的アプローチを可能にしたのである。

一方、推計された関数は経済理論との整合性、例えば、連続性、同次性あるいは関数の形状に関する条件（費用関数であれば凹性）を満足することが要請される。FFF でスペシファイした場合の唯一の欠点は、観察データの大局的な領域において、計測された関数が上記の最後の条件、すなわち関数の形状に関する条件を満足しないケースが往々にして起こり得るところにある。以上の点を勘案すると、関数の flexibility と well-behavior はトレードオフの関係にあるといえる。本稿はこの点に着目し、FFF が well-behaved となるデータ（価格）領域を見いだし、その計測結果をもとに費用関数の特定化に関してひとつの有益な情報を提供しようとするものである。

TL 関数は費用関数 $C(P, Y)$ を対数変換し、テイラー展開の 2 回微分項までをとることで与えられる。

$$\begin{aligned} \ln C(P, Y) = & \alpha_0 + \alpha_Y \ln Y + \frac{1}{2} \alpha_{YY} (\ln Y)^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_{iY} \ln P_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \ln P_i \ln P_j \\ & + \sum_{i=1}^n \alpha_{Yi} \ln Y \ln P_i \dots\dots\dots (3.1) \end{aligned}$$

要素価格 P に関する 1 次同次性と対称性より以下のパラメータ制約が課せらる。また要

要素価格 P に関する凹性は $C(P, Y)$ の P に関するヘシアンが、負値定符号行列であることと同値である（この点は関数型の如何を問わず、変数 P に関する凹性の定義である⁽²⁾）。

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \quad \sum_{i=1}^n \alpha_{yi} = 0 \quad \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} = 0 \quad \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} = 0 \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji} \dots\dots\dots (3.2)$$

ここで生産関数が homothetic であると (2.2) 式より α_{yi} (for all i) = 0 といった新たな制約が加わり、また生産関数が k 次同次の場合、(2.3) 式より制約条件 α_{yi} (for all i) = 0 $\alpha_{yy} = 0$ $\alpha_y = 1/k$ が追加される。

実証分析にみられる特定化の多くはこの TL 関数であるが、flexible な関数型は TL 関数以外にも存在する。以下 GL, EGCD, GSRQ の3つの関数型を列挙しよう。

GL 関数は

$$C(P, Y) = Y \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \sqrt{P_i P_j} + Y^2 \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i + \sum_{i=1}^n \beta_i P_i \dots\dots\dots (3.3)$$

で表され、関数自体が要素価格に対する1次同次の条件を満足している。対称条件より $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ となるが、このパラメータがすべて0であると、最適要素投入量は要素価格から独立となり、（すなわち、代替の弾力性が0となり）生産関数はレオンティエフ型となることが容易に理解できる⁽³⁾。生産関数が homothetic であると、制約条件 $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 0$ (for all i) が課せられ (3.3) 式の右辺第1項のみが残るが、この制約条件は、関数の homotheticity, homogeneity, linear homogeneity の峻別を不可能にする。

EGCD 関数⁽⁴⁾は

$$\ln C(P, Y) = \alpha_0 + \alpha_y \ln Y + \frac{1}{2} \alpha_{yy} (\ln Y)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \ln (\beta_i P_i + \beta_j P_j) \\ + \sum_{i=1}^n \alpha_{yi} \ln Y \ln P_i \quad (\beta_k > 0 \text{ for all } k) \dots\dots\dots (3.4)$$

で与えられ、パラメータ制約は要素価格に関する1次同次性と対称性より

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} = 1 \quad \sum_{i=1}^n \alpha_{yi} = 0 \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji} \dots\dots\dots (3.5)$$

となる。生産関数が homothetic および k 次同次の場合は、TL 関数と全く同じ制約条件が (3.5) 式に追加される。

最後に、GSRQ 関数は homotheticity の表現に変化をもたせることは可能だが、とりあえず、

$$C(P, Y) = Y \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} P_i P_j} + Y^2 \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i + \sum_{i=1}^n \beta_i P_i \dots\dots\dots (3.6)$$

で与えられるとする。(3.6) 式はすでに、要素価格に関する1次同次の条件を満足してい

第1表 A. J. A. Eに掲載された生産関数, 費用関数および利潤関数の計測 (1974年~)

	生産関数		費用関数		利潤関数		小 計
CD	1974○	1975○	1974○	1974○	1976○	1979○	21
	1976○	1976○			1979○	1981○	
	1976○	1977○			1982○		
	1979○	1979○					
	1980○	1980○					
	1982○	1983○					
	1983○	1987○					
TL	1974△	1981△	1974△	1978○	1981△	1983○	23
	1981△	1983△	1979×	1982△	1983△	1984×	
	1984△	1987△	1982△	1982×	1984△	1985○	
			1983×	1986○	1987×		
			1986○	1987○			
GL			1980○	1982△	1984×	1986○	5
			1983×				
Leontief			1980○				1
小 計	20		16		14		50

注(1) 数字は刊行年。

(2) ○印は計測された関数が, 観察データの全ての領域で well-behaved であることを意味し, △印は論文中にその記述がないことを示す。また×印は観察データの一部の領域で関数が well-behaved でないことを意味する。

るが, GL 関数と同様に $\alpha_i=0, \beta_i=0$ (for all i) とすると, homotheticity, homogeneity, linear homogeneity の区別が不可能となる。

以上の関数型は従来の CD, または CES 関数を特殊ケースとして含むもの, あるいはそれらを一般化したものとして⁽⁵⁾, 生産理論はもとより, 消費理論の実証分析においても頻繁に登場するのである。第1表は1974年以降の American Journal of Agricultural Economics (A. J. A. E)に掲載された生産関数等を分析ツールとする論文, ノートの一覧である。1980年以降, 推定技術の向上により費用関数, 利潤関数を TL 関数で特定化する論文数が増加するが⁽⁶⁾, その計測結果のいくつかは, 経済理論との整合性を保持していない。さらに, 関数型の選択について特に言及している論文は皆無である。

ところで, D. K. Guilkey *et al.* [17] はモンテカルロ (Monte Carlo) 実験により, TL, GL, EGCD 関数のパフォーマンスについて検討を加え, その結果, 代替の弾力性

が極端に1から乖離しなければ、TL 関数が他の関数型と比較して優位性を保つことを立証した⁽⁷⁾。また D. W. Caves and L. R. Christensen [8] は間接効用関数に、TL, GL 関数を適用し、代替の弾力性が要素間で大きく異なる場合には、GL 関数が最適な特定化であると結論づけた。本稿は Caves and Christensen の関数型選択基準に即し、新たに EGCD および GSRQ 関数を加え、これらを費用関数に適用することで、費用関数の必要十分条件を満足するデータ範囲といった観点から関数型の選択について、ひとつのガイドラインを与えるものである。

注(1) CES 関数は、説明変数の弱分離可能性を元来その性質としてもっている。弱分離可能性の仮定をおくと、投入財の部分集合 S に含まれる財、 i, j と S に含まれない財 k の間には、 $\sigma_{ik} = \sigma_{jk}$ ($i, j \in S, k \notin S$) といった代替関係が存在する。したがって、代替の弾力性が一定である CES で特定化することは、生産要素の代替関係に先験的な制約を課することになる。この点については、E. R. Berndt and L. R. Christensen [4] あるいは C. Blackorby and R. R. Russell [7] に明快な証明がある。

(2) 費用関数に関する凹性の必要十分条件 ($C(P, Y)$ の P に関するヘシアンが負値定符号行列である) は、行列 $[\sigma_{ij}]$ が負値定符号行列であることと同値である。

〔証明〕

定義より

$$\sigma_{ij} = \frac{C_i C_j}{C} \therefore C_{ij} = \frac{C_i \sigma_{ij} C_j}{C} \text{ となり, これを行列表示すると}$$

$$[C_{ij}] = -\frac{1}{C} \begin{bmatrix} C_1 & (0) \\ (0) & C_n \end{bmatrix} [\sigma_{ij}] \begin{bmatrix} C_1 & (0) \\ (0) & C_n \end{bmatrix} \text{ となる。}$$

$\det [C_{ij}] = (\prod_{i=1}^n C_i)^2 \det [\sigma_{ij}] / C$ が成立するため、 $C(P, Y)$ の P に関するヘシアンが負値定符号行列であることと、行列 $[\sigma_{ij}]$ が負値定符号であることは同値である。

(3) 詳しくは、W. E. Diewert [12] を参照。なお、GL 関数を実証分析に用いている例としては A. D. Woodland [35], R. G. Chambers [10], R. G. Chambers and U. Vasavada [11] などが代表的である。

(4) EGCD 関数の適用例としては J. R. Magnus [25] があり、極めて稀なスペシフィックーションとして注目できる。

(5) TL, GL, GSRQ 関数を特殊ケースとして含む関数型として、generalized Box-Cox function (GBC) が E. R. Berndt and M. S. Khaled [5] によって提示された。関数型は以下に示すとおりである。

$$C(\mathbf{P}, Y) = [1 + rG(\mathbf{P})]^{1/r} Y^{b(\mathbf{P}, Y)}, \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

$$G(\mathbf{P}) = \alpha_0 + \sum \alpha_i P_i(r) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} P_i(r) P_j(r) \dots \dots \dots \textcircled{2}$$

$$b(\mathbf{P}, Y) = b + \frac{\theta}{2} \ln Y + \sum_{i=1}^n \phi_i \ln P_i \quad P_i(r) = \frac{2(P_i^{\frac{r}{2}} - 1)}{r} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

(ただし, r は推定パラメータ)

価格に関する 1 次同次の仮定より $\sum \alpha_i = 1 + r\alpha_0$ $\sum \alpha_{ij} = r\alpha_i/2$ $\sum \phi_i = 0$ がパラメータ制約として加わるが, これらを①式の右辺へ代入すると

$$C(\mathbf{P}, Y) = \left(\frac{2}{r} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} P_i^{\frac{r}{2}} P_j^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{1}{r}} Y^{b(\mathbf{P}, Y)} \dots \dots \dots \textcircled{3}$$

となる。ここで $\phi_i = 0$ (for all i), $\theta = 0$ とすると, 費用関数の背後にある生産関数が $1/b$ 次同次であることを意味する。次にパラメータの値によって, GBC 関数が TL, GL, GSRQ 関数となることを示す。③式の r に 1, 2 を代入して GL, GSRQ 関数を導くことは容易である。GBC 関数から TL 関数を導出するには①式を

$$G(\mathbf{P}) = \frac{[C/Y^{b(\mathbf{P}, Y)}]^{r-1}}{r}$$

とした上で $r \rightarrow 0$ の極限をとると, ロピタルの定理より

$\lim_{r \rightarrow 0} G(\mathbf{P}) = \ln C - b(\mathbf{P}, Y) \ln Y$ をえる。また $\lim_{r \rightarrow 0} 2(P_i^{\frac{r}{2}} - 1)/r = \ln P_i$ が成立するため, ②式についても同様に $r \rightarrow 0$ の極限をとると,

$$\lim_{r \rightarrow 0} G(\mathbf{P}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln P_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \ln P_i \ln P_j$$

となりこの 2 式より GBC 関数は TL 関数を特殊ケースとして含むことが証明された。なお, Box-Cox function については J. Johnston [19] の第 3 章を参照。

(6) TL 関数は指数理論との対応において興味深い関係がある。すなわち生産関数の 1 次同次性を仮定すると, ディビジア (Divisia) 指数の離散近似であるトルンクビスト (Törnqvist) 指数の系列から費用関数を推計することなく, 技術進歩率を残差として計測することが可能となる。詳細は B.H. Baltagi and J.M. Griffin [3] を参照。

(7) 関数型の選択に関するサーベイ論文は, D. K. Guilkey, C. A. K. Lovell and R. C. Sickles [17] の他に, D. K. Guilkey and C. A. K. Lovell [18] などが参考になる。

4. 費用関数の必要十分条件が満たされるデータ範囲

さて, 費用関数の必要十分条件が満たされるデータ範囲を求める前に, 以下の定理から

4つの関数型の任意性を証明してみたい。

〔定理〕

費用関数の必要十分条件を満足する任意の費用関数 C^* を所与として、これが2回微分可能であると仮定する。すなわち、

$$C_i^* = \frac{\partial C^*}{\partial P_i} \Big|_{P^* Y^*} \text{ for all } i \quad C_{ij}^* = \frac{\partial^2 C^*}{\partial P_i \partial P_j} \Big|_{P^* Y^*} \text{ for all } i, j$$

$$C_{iY}^* = \frac{\partial^2 C^*}{\partial P_i \partial Y} \Big|_{P^* Y^*} \text{ for all } i \quad C_{YY}^* = \frac{\partial^2 C^*}{\partial Y^2} \Big|_{P^* Y^*}$$

とすると、 P^*, Y^* における C^* の2次近似関数 $C(P, Y)$ として、TL, GL, EGCD, GSRQ 費用関数が存在する。なお2次近似の定義は

$$C(P^*, Y^*) = C^*(P^*, Y^*), C_i(P^*, Y^*) = C_i^*(P^*, Y^*), C_{ij}(P^*, Y^*) = C_{ij}^*(P^*, Y^*)$$

$$C_{iY}(P^*, Y^*) = C_{iY}^*(P^*, Y^*) \quad (\text{for } i, j = 1, 2, \dots, n)$$

$$C_{YY}(P^*, Y^*) = C_{YY}^*(P^*, Y^*)$$

とする(1)。

〔証明〕

C^* は P に関して1次同次関数であるから、オイラーの定理より

$$C^*(P^*) = \sum_{i=1}^n P_i^* C_i^* \dots\dots\dots (4.1)$$

が成立する。また C^* は2回微分可能であるからヤングの定理より

$$C_{ij}^* = C_{ji}^* \dots\dots\dots (4.2)$$

となる。さらに C_i^* は P に関して0次同次であるから

$$\sum_{j=1}^n P_j^* C_{ij}^* = 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n \dots\dots\dots (4.3)$$

が成立する。以上より $C^*(P^*, Y^*)$ は、(4.1) 式より n 個の C_i^* より決定され、 C_{ji}^* (for $1 \leq i < j \leq n$) および C_{ii}^* (for $i = 1, 2, \dots, n$) は(4.2), (4.3) 両式より、 $n(n-1)/2$ 個の C_{ij}^* ($1 \leq i < j \leq n$) から決定される。

さていま GL 関数を P_i について微分した後、 P^* で評価したものを $C_i^*(= \partial C^* / \partial P_i |_{P^* Y^*})$ に等しいと置き、さらに $\partial C / \partial P_i$ を $P_j (j > i)$ について微分したものを、 C_{ij}^* ($= \partial^2 C^* / \partial P_i \partial P_j |_{P^* Y^*}$) と等しいと置く。以下同様に $C_{iY}(P^*, Y^*) = C_{iY}^*(P^*, Y^*)$, $C_{YY}(P^*, Y^*) = C_{YY}^*(P^*, Y^*)$ とする。すなわち

$$C_i^* = Y \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \sqrt{P_j^* / P_i^*} + \alpha_i Y^{*2} + \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$C_{ij}^* = \frac{\alpha_{ij}}{2\sqrt{P_i^* P_j^*}} \quad (1 \leq i < j \leq n)$$

$$C_Y^* = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \sqrt{P_i^* P_j^*} + 2Y^* \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i^*$$

$$C_{YY}^* = 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i^*$$

$$C_{iY}^* = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \sqrt{P_j^* / P_i^*} + Y^{*2} \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i^* + \sum_{i=1}^n \beta_i P_i^* \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

とする。例えば、 $n=3$ では 11 個の独立な方程式に対して、12 個のパラメータが存在するためパラメータの値は確定しないが、関数の任意性は損なわれない。以上より、GL 関数が任意の費用関数 $C^*(P, Y)$ の 2 次近似であることが証明された。また、このことは TL, EGCD, GSRQ 関数についてもほぼ同様に成立する。 (Q. E. D)

次にシェファードの補題を (3.1), (3.3), (3.4), (3.6) 式に適用し、コストシェア方程式を求めるとともに、代替の弾力性を計算する。

TL 関数のコストシェア方程式は

$$S_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \ln P_j + \alpha_Y \ln Y$$

で与えられ、また代替の弾力性は次式で与えられる。

$$\sigma_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{S_i S_j} + 1 \quad (i \neq j) \quad \sigma_{ii} = \frac{1}{S_i^2} (\alpha_{ii} + S_i^2 - S_i)$$

GL 関数の条件付き要素需要関数は

$$X_i = Y \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \sqrt{P_j / P_i} + \alpha_i Y^2 + \beta_i$$

となり、これよりコストシェア方程式

$$S_i = \frac{P_i X_i}{C} = \frac{Y \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \sqrt{P_i P_j} + \alpha_i P_i Y^2 + \beta_i P_i}{Y \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \sqrt{P_i P_j} + Y^2 \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i + \sum_{i=1}^n \beta_i P_i}$$

をえる。また代替の弾力性は次式で与えられる。

$$\sigma_{ij} = \frac{\{\alpha_{ij} Y (P_i P_j)^{-\frac{1}{2}}\} \{Y \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_{km} \sqrt{P_k P_m} + Y^2 \sum_{k=1}^n \alpha_k P_k + \sum_{k=1}^n \beta_k P_k\}}{2\{Y \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \sqrt{P_k / P_i} + \alpha_i Y^2 + \beta_i\} \{Y \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} \sqrt{P_k / P_j} + \alpha_j Y^2 + \beta_j\}} \quad (i \neq j)$$

$$\sigma_{ii} = - \frac{\{Y \sum_{k \neq i}^n \alpha_{ik} P_k^{\frac{1}{2}} P_i^{-\frac{3}{2}}\} \{Y \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_{km} \sqrt{P_k P_m} + Y^2 \sum_{k=1}^n \alpha_k P_k + \sum_{k=1}^n \beta_k P_k\}}{2\{Y \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \sqrt{P_k / P_i} + \alpha_i Y^2 + \beta_i\}^2}$$

EGCD 数のコストシェア方程式は

$$S_i = 2 \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_i P_i (\beta_i P_i + \beta_j P_j)^{-1} + \alpha_{Yi} \ln Y$$

となり、また代替の弾力性は次式で与えられる。

$$\sigma_{ij} = 1 - \frac{2 \alpha_{ij} \beta_i \beta_j P_i P_j}{(\beta_i P_i + \beta_j P_j)^2 S_i S_j} \quad (i \neq j)$$

$$\sigma_{ii} = \frac{1}{S_i^2} \left(2 \sum_{j \neq i}^n \frac{\alpha_{ij} \beta_i \beta_j P_i P_j}{(\beta_i P_i + \beta_j P_j)^2} + S_i^2 - S_i \right)$$

EGCD 関数は、推定パラメータに関して線型ではない上に、代替の弾力性が使用するデータの単位によって変化してしまうため過去の実証分析においては適用例が少ない。

最後に GSRQ 関数の条件付き要素需要関数、コストシェア方程式は、次式で与えられる。

$$X_i = \frac{Y \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} P_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} P_i P_j}} + \alpha_i Y^2 + \beta_i$$

$$S_i = \frac{P_i X_i}{C} = \frac{Y \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} P_i P_k + (\alpha_i P_i Y^2 + \beta_i P_i) \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_{km} P_k P_m}}{(Y \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_{km} P_k P_m) + (Y^2 \sum_{k=1}^n \alpha_k P_k + \sum_{k=1}^n \beta_k P_k) \sqrt{Y \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_{km} P_k P_m}}$$

代替の弾力性は

$$M_i = Y \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} P_k + (\alpha_i Y^2 + \beta_i) \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_{km} P_k P_m}$$

とすると次式で与えられる。

$$\sigma_{ij} = \frac{C(P, Y) Y \{ \alpha_{ij} \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_{km} P_k P_m} - (\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_{km} P_k P_m)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} P_k \sum_{m=1}^n \alpha_{jm} P_m \}}{M_i M_j} \quad (i \neq j)$$

$$\sigma_{ii} = \frac{C(P, Y) Y \{ \alpha_{ii} \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_{km} P_k P_m} - (\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_{km} P_k P_m)^{-\frac{1}{2}} (\sum_{k=i}^n \alpha_{ik} P_i P_k) \}}{M_i^2}$$

さてここでパラメータを確定するため、生産関数が3つの生産要素からなり、かつ homothetic な場合を想定した上で⁽²⁾、初期条件 I から X を第2表のように設定する。すなわち、生産要素の相対価格が $P_3/P_1 = P_2/P_1 = 1$ の時、3財のコストシェア $S_i (i=1, 2, 3)$ は1/3、またその時の代替の弾力性を I から X のように設定するのである。これらの数値

第2表 初期条件と確定パラメータ

$P_2/P_1=P_3/P_1=1$ の時, $S_1=S_2=S_3=1/3$

初期条件\関数型	TL	GL
(I) $\sigma_{12}=\sigma_{13}=\sigma_{23}=2$	$\alpha_{11}=\alpha_{22}=\alpha_{33}=-2/9$ $\alpha_{12}=\alpha_{23}=\alpha_{13}=1/9$	$\alpha_{11}=\alpha_{22}=\alpha_{33}=-5/3$ $\alpha_{12}=\alpha_{23}=\alpha_{13}=4/3$
(II) $\sigma_{12}=\sigma_{13}=\sigma_{23}=3/2$	$\alpha_{11}=\alpha_{22}=\alpha_{33}=-1/9$ $\alpha_{12}=\alpha_{23}=\alpha_{13}=1/18$	$\alpha_{11}=\alpha_{22}=\alpha_{33}=-1$ $\alpha_{12}=\alpha_{23}=\alpha_{13}=1$
(III) $\sigma_{12}=\sigma_{13}=\sigma_{23}=1$	$\alpha_{11}=\alpha_{22}=\alpha_{33}=0$ $\alpha_{12}=\alpha_{23}=\alpha_{13}=0$	$\alpha_{11}=\alpha_{22}=\alpha_{33}=-1/3$ $\alpha_{12}=\alpha_{23}=\alpha_{13}=2/3$
(IV) $\sigma_{12}=\sigma_{13}=\sigma_{23}=1/2$	$\alpha_{11}=\alpha_{22}=\alpha_{33}=1/9$ $\alpha_{12}=\alpha_{23}=\alpha_{13}=-1/18$	$\alpha_{11}=\alpha_{22}=\alpha_{33}=1/3$ $\alpha_{12}=\alpha_{23}=\alpha_{13}=1/3$
(V) $\sigma_{12}=1/2$ $\sigma_{13}=\sigma_{23}=3/2$	$\alpha_{11}=\alpha_{22}=0$ $\alpha_{33}=-1/9$ $\alpha_{13}=\alpha_{23}=-1/18$ $\alpha_{12}=1/18$	$\alpha_{11}=\alpha_{22}=-1/3$ $\alpha_{22}=-1$ $\alpha_{12}=\alpha_{23}=1$ $\alpha_{12}=1/3$
(VI) $\sigma_{12}=0$ $\sigma_{13}=\sigma_{23}=3/2$	$\alpha_{11}=\alpha_{22}=1/18$ $\alpha_{33}=-1/9$ $\alpha_{13}=\alpha_{23}=1/18$ $\alpha_{12}=-1/9$	$\alpha_{11}=\alpha_{22}=0$ $\alpha_{33}=-1$ $\alpha_{13}=\alpha_{23}=1$ $\alpha_{12}=0$
(VII) $\sigma_{12}=-1/2$ $\sigma_{13}=\sigma_{23}=3/2$	$\alpha_{11}=\alpha_{22}=1/9$ $\alpha_{33}=-1/9$ $\alpha_{13}=\alpha_{23}=1/18$ $\sigma_{12}=-1/6$	$\alpha_{11}=\alpha_{22}=1/3$ $\alpha_{33}=-1$ $\alpha_{13}=\alpha_{23}=1$ $\alpha_{12}=-1/3$
(VIII) $\sigma_{12}=-1$ $\sigma_{13}=\sigma_{23}=3/2$	$\alpha_{11}=\alpha_{22}=1/6$ $\alpha_{33}=-1/9$ $\alpha_{13}=\alpha_{23}=1/18$ $\alpha_{12}=-2/9$	$\alpha_{11}=\alpha_{22}=2/3$ $\alpha_{33}=-1$ $\alpha_{13}=\alpha_{23}=1$ $\alpha_{12}=-2/3$
(IX) $\sigma_{12}=0$ $\sigma_{13}=\sigma_{23}=1/2$	$\alpha_{11}=\alpha_{22}=1/6$ $\alpha_{33}=1/9$ $\alpha_{13}=\alpha_{23}=-1/18$ $\alpha_{12}=-1/9$	$\alpha_{11}=\alpha_{22}=2/3$ $\alpha_{33}=1/3$ $\alpha_{13}=\alpha_{23}=1/3$ $\alpha_{12}=0$
(X) $\sigma_{12}=-1/4$ $\sigma_{13}=\sigma_{23}=1/2$	$\alpha_{11}=\alpha_{22}=7/36$ $\alpha_{33}=1/9$ $\alpha_{13}=\alpha_{23}=-1/18$ $\alpha_{12}=-5/36$	$\alpha_{11}=\alpha_{22}=5/6$ $\alpha_{33}=-1/3$ $\alpha_{13}=\alpha_{23}=1/3$ $\alpha_{12}=-1/6$

第2表続き 初期条件と確定パラメータ

 $P_2/P_1 = P_3/P_1 = 1$ の時, $S_1 = S_2 = S_3 = 1/3$

初期条件\関数型	EGCD	GSRQ
(I) $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 2$	$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 7/9$ $\alpha_{12} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = -2/9$	$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = -1$ $\alpha_{12} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1$
(II) $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 3/2$	$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 5/9$ $\alpha_{12} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = -1/9$	$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = -2/3$ $\alpha_{12} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 5/6$
(III) $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 1$	$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1/3$ $\alpha_{12} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 0$	$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = -1/3$ $\alpha_{12} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 2/3$
(IV) $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 1$	$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1/9$ $\alpha_{12} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1/9$	$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 0$ $\alpha_{12} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 1/2$
(V) $\sigma_{12} = 1/2$ $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 3/2$	$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1/3$ $\alpha_{33} = 5/9$ $\alpha_{13} = \alpha_{23} = -1/9$ $\alpha_{12} = 1/9$	$\alpha_{11} = \alpha_{22} = -1/3$ $\alpha_{33} = -2/3$ $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 5/6$ $\alpha_{12} = 1/2$
(VI) $\sigma_{12} = 0$ $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 3/2$	$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 2/9$ $\alpha_{33} = 5/9$ $\alpha_{13} = \alpha_{23} = -1/9$ $\alpha_{12} = 2/9$	$\alpha_{11} = \alpha_{22} = -1/6$ $\alpha_{33} = -2/3$ $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 5/6$ $\alpha_{12} = 1/3$
(VII) $\sigma_{12} = -1/2$ $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 3/2$	$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1/9$ $\alpha_{33} = 5/9$ $\alpha_{13} = \alpha_{23} = -1/9$ $\alpha_{12} = 1/3$	$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$ $\alpha_{33} = -2/3$ $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 5/6$ $\alpha_{12} = 1/6$
(VIII) $\sigma_{12} = -1$ $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 3/2$	$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$ $\alpha_{33} = 5/9$ $\alpha_{13} = \alpha_{23} = -1/9$ $\alpha_{12} = 4/9$	$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1/6$ $\alpha_{33} = -2/3$ $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 5/6$ $\alpha_{12} = 0/9$
(IX) $\sigma_{12} = 0$ $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 1/2$	$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$ $\alpha_{33} = 1/9$ $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 1/9$ $\alpha_{12} = 2/9$	$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1/6$ $\alpha_{33} = 0$ $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 1/2$ $\alpha_{12} = 1/3$
(X) $\sigma_{12} = -1/4$ $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 1/2$	$\alpha_{11} = \alpha_{22} = -1/18$ $\alpha_{33} = 1/9$ $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 1/9$ $\alpha_{12} = 1/9$	$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1/4$ $\alpha_{33} = 0$ $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 1/2$ $\alpha_{12} = 1/4$

注. EGCD 関数については, 上記の初期条件だけで β_1 のパラメータをもとめることができない。ここでは $\beta_1 = 1/2$ としたが, この設定は以下の計測結果とは無関係である。

をコストシェア方程式および代替の弾力性を求める式に代入すると、パラメータの値が各関数毎に同表のように確定する（もちろん TL, EGCD 関数にはそれぞれ (3.2), (3.5) 式のパラメータ制約が課せられる）。

さて、以上の準備段階を経て、本稿の最終課題に立ち返ることにする。費用関数の必要十分条件のうち、以下で問題となるのは費用関数の要素価格に関する凹性と要素価格に関して非通減、この2つの条件である。前者についてはすでに指摘したとおり、行列 $[\sigma_{ij}]$ が負値定符号行列となることと同値であるが、コストシェア S_i と代替の弾力性 σ_{ij} の間には、

$$\sum_{j=1}^n S_j \sigma_{ij} = 0 \quad \dots\dots\dots (4.4)$$

の関係が存在し⁽³⁾、 S_j の中に必ず0でないものが存在するため、行列 $[\sigma_{ij}]$ の n 次行列の階数は $n-1$ となり、 n 次の行列式は0となる。また後者の条件、すなわち要素価格に関する非通減については、シェファードの補題より全てのコストシェアが正となることと同値である。以上より費用関数の必要十分条件が満たされるデータ範囲は、 $n=3$ の場合

$$\begin{aligned} S_i &> 0 & (i=1, 2, 3) \\ \sigma_{11} &< 0 & \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 > 0 \end{aligned}$$

の連立不等式を解くことで求められる。この手続きは I ~ X の初期条件のもと、これら5つ式を満足する正、負領域を相対価格の変数として求めることに帰着する。なお、初期条件は少なくとも、 $S_i > 0$ ($i=1, 2, 3$)、 $\sigma_{11} < 0$ が成立するように設定した。具体的には代替関係の優越性⁽⁴⁾より、例えば、第1財が第3財と代替関係にあると仮定すると、 $|\sigma_{13}| > |\sigma_{12}|$ は最小限成立するように配慮した。

第1図(1)は TL 関数の初期条件 I については、 $S_i > 0$ ($i=1, 2, 3$)、 $\sigma_{11} < 0$ 、 $\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 > 0$ を満足する価格領域を図示したもので、それらの共通集合を第1図(2)の実線で示した。以下第1図(3)~第4図(3)は初期条件の変化に応じて、費用関数の必要十分条件を満足する価格領域がいかに変化するかを示したものである⁽⁵⁾。TL 関数について、初期条件Ⅲは全ての価格領域で必要十分条件を満足するため図を省略した。GL 関数の初期条件Ⅳ、Ⅸについて、EGCD 関数のⅡ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅸについて、また GSRQ 関数のⅣ、Ⅸについても同様な理由から図を省略した。また EGCD 関数のⅦおよび GSRQ 関数のⅦについては、必要十分条件を満足する価格領域は存在せず、GSRQ 関数のⅩについては、価格領域が散在したため図を割愛した。最後に最も広範な価格領域をもつ関数型を確定するため、初期条件Ⅰ、Ⅶ、Ⅸについて相対価格のスケールを統一した上で、それらを改めて第

5 図(1)~(3)に示した。

注(1) $G(\mathbf{X})$ を $F(\mathbf{X})$ の $\mathbf{X}_0$ における2次近似と仮定し、関数の2次近似を以下で定義することもある。

$$G(\mathbf{X}_0) = F(\mathbf{X}_0) \quad \text{and} \quad |G(\mathbf{X}) - F(\mathbf{X})| \leq k \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\|^3 / \|\mathbf{X}_0\|^3$$

k は所与の $\mathbf{X}_0$ とその近傍に対して一定値をとり、 $\|\mathbf{X}\|$ はノルムを表す。上式は真の関数と近似式との差は、3次以下で表現されることを意味している。

- (2) 推計の自由度を確保するため、生産関数を homothetic とする仮定は存外無造作に採られてきた。例えば生産関数の(1次)同次性をアブリオリに仮定し、技術進歩のバイアスを計測している例として、L. T. Nghiep [26], H. P. Binswanger [6], T. Kako [20] などがある。しかし、この仮定は技術進歩の計測にとって、そのバイアスを過大ないしは過小評価する危険性が存在することを指摘しておきたい。この点については R. E. Lopez [24], Y. Kuroda [22] を参照されたい。
- (3) 条件付き要素需要関数が、要素価格に関して0次同次であるため、オイラーの定理より $\sum_j (\partial X_i / \partial P_j) P_j = 0$ が成立する。これと(2.1)式より(4.4)式が成立する。
- (4) $\sigma_{ii} < 0$ と(4.4)式より、 $\sum_{j \neq i} S_j \sigma_{ij} > 0$ が成立し、このことは代替関係が補完関係より優越していることを示している。
- (5) 図の解釈にあたり両軸のスケールの取り方に留意されたい。

5. 結 語

M. Fuss, D. Mcfadden and Y. Mundlak [15] は、関数特定化の基準として以下の5つを挙げている。

- (i) 推定パラメータの節約
- (ii) 推定パラメータの解釈の容易さ
- (iii) 推定技術の容易さ
- (iv) 観察データと経済理論との整合性
- (v) 観察外データと経済理論との整合性

TL 関数をはじめとする flexible function forms (FFF) は基準(ii)および(iii)の観点からは、必ずしも最適関数型とはいえない。例えば、代替の弾力性の概数を推定パラメータから一見して読み取ることは困難であり、また TL 関数を始めとする FFF の費用関数の計測は同時方程式による推計技術が要求される。しかし、最近の推定技術の発達では FFF の計測を容易にし、基準(i)および(iii)の重要性を低下させてきた。本稿の分析結果は基準(iv), (v)を選択基準とした時の関数の特定化について、ひとつの目安を与えている。

初期条件の設定、すなわち財の代替補完関係は、あらゆる組合せを想定することが可能である。特に EGCD, GSRQ 関数の性質を断定するには第2表で示した初期条件だけでは、不十分である。そこで新たな計測を実行しそれらの結果を踏まえた上で、課題に対する答を概ね以下のようにまとめた。

- (i) TL 関数は代替の弾力性が1から乖離するに従い、費用関数の必要十分条件を満たす価格領域を縮小させる(第1図(2)参照)。さらに代替の弾力性が全て正であると、TL 関数の適用可能範囲は比較的広い範囲を維持するが(第1図(3)参照)、生産要素間に補完関係が存在すると、TL 関数で許容される領域面積は急激に減少する(第1図(4),(5)参照)。
- (ii) GL 関数が最適なスペシフィケーションとなるのは、代替の弾力性が極めて小さい時(初期条件VおよびIX)であり、第2図(1),(2)が示唆するように、弾性値が0.5から乖離するに従い、GL 関数で許容されるデータ範囲も次第に限定されてくる。また、TL 関数と異なり生産要素間に補完関係が存在しても、価格領域は比較的広い範囲を維持している(第2図(3),(4)参照)。
- (iii) EGCD 関数は、弾性値がデータの単位に依存するため、パラメータの不安定性といった問題が存在する。しかし、財の代替関係が支配的な場合、費用関数で許容されるデータ範囲は4つの関数型の中で最も広く(第3図(1)参照)、初期条件II, III, IV, V, VI, IXについては前節で指摘したとおり、全ての価格領域で費用関数の必要十分条件を満たした。また第3図(2),(3)および初期条件VII, IXの計測結果より、負の弾力性(σ_{12})の微妙な変化が、価格領域を大幅に変動させるが、初期条件VIIの状態から σ_{12} の値を-0.5から-0.9まで減少させても、領域の縮小は極く僅かである。
- (iv) GSRQ 関数はGL 関数同様、代替の弾力性が小さい時に有力な関数であり、また費用関数の必要十分条件を満たす価格領域は、GL 関数と酷似している(第2図(1)と第4図(1)および第2図(2)と第4図(2)を比較せよ)。また初期条件VII(第4図(3))、IXに限っては、財の補完関係が混在しても、費用関数の必要十分条件を満たす価格領域は広範な領域を維持するが、初期条件VIII, Xについては、GL 関数よりやや劣る。
- (v) 第5図(1)~(3)より、関数間の比較が可能となる。生産要素の代替関係にも依存するが、概してEGCD 関数が最も広範な領域を形成し、反対にTL 関数の適用許容範囲は限定的である。また、TL, GL 関数については、D.W. Caves and L.R. Christensen [8]の結論を概ね肯定する結果となった⁽¹⁾。

全ての関数型について財の補完関係が存在した場合、価格領域が縮小する点については、代替関係の優越性からある程度予想された結果である。したがって、負の代替

の弾力性が存在した時、GL 関数が整合的な実証分析に耐えうるスペシフィケーションであるといった点は、関数の特定化に際し貴重な情報を提供している。

関数の特定化に関し本稿が提示した選択基準は一例に過ぎない。これと全く別の観点から E. Applebaum [1] は、主問題には GL 関数を適用し、双対問題には GSRQ 関数を適用することが、生産技術を正確に知る上で最適な特定化であると指摘している。

実証分析における関数型の特定化が、計測結果のひとつの規定要因となることを考慮すると、実証分析のスタート地点ともいえる関数型の特定化についてさえ、安易な選択は許されないものと考えられる。

注(1) D.W. Caves and L.R. Christensen [8] は、間接効用関数の必要十分条件を満たす価格領域を求めている。間接効用関数は準凸性を要求しているため、ヘシアンに代わり縁付きヘシアンが問題となる。したがって、彼らとは異なる分析結果を期待したが、TL, GL 関数についてはほぼ同様な結論に達し、本稿の分析結果が若干平凡なものになった感否めない。

〔引用文献〕

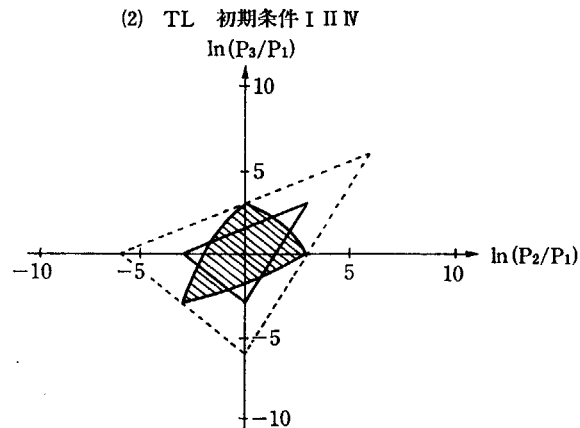
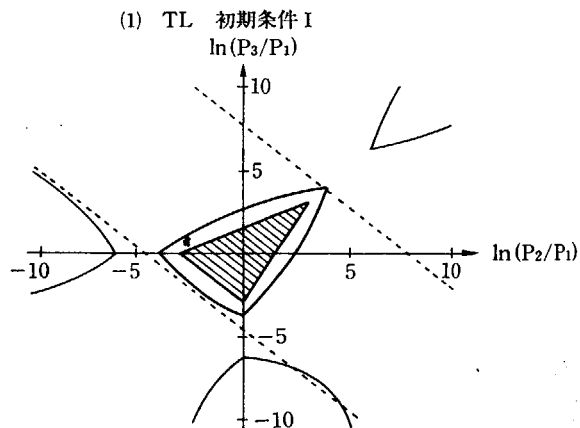
- [1] Applebaum, E. "On the Choice of Functional Forms." *International Economic Review* 20 (June 1979): 449-458.
- [2] Ball, V. E., and Chambers, R. G. "An Economic Analysis of Technology in the Meat Products Industry." *American Journal of Agricultural Economics* 64 (November 1982): 699-709.
- [3] Baltagi, B. H., and Griffin, J. M. "A General Index of Technical Change." *Journal of Political Economy* 96 (February 1988): 20-41.
- [4] Berndt, E. R., and Christensen, L. R. "The Internal Structure of Functional Relationships: Separability, Substitution, and Aggregation." *Review of Economic Studies* 40 (July 1973): 403-410.
- [5] Berndt, E. R., and Khaled, M. S. "Parametric Productivity Measurement and Choice among Flexible Functional Forms." *Journal of Political Economy* 87 (December 1979): 1220-1245.
- [6] Binswanger, H. P. "The Measurement of Technical Change Biases with Many Factors of Production." *American Economic Review* 64 (December 1974): 964-976.
- [7] Blackorby, C., and Russell, R. R. "Functional Structure and the Allen Partial Elasticities of Substitution: An Application of Duality Theory." *Review of Economic Studies* 43 (February 1976): 285-291.

- [8] Caves, D. W., and Christensen, L. R. "Global Properties of Flexible Functional Forms." *American Economic Review* 70 (June 1980): 422-432.
- [9] Chalfant, J. A. "Comparison of Alternative Functional Forms with Application of Agricultural Input Data." *American Journal of Agricultural Economics* 66 (May 1984): 216-220.
- [10] Chambers, R. G. "Duality, the Output Effect, and Applied Comparative Statics." *American Journal of Agricultural Economics* 64 (February 1982): 152-156.
- [11] Chambers, R. G., and Vasavada, U. "Testing Asset Fixity for U. S. Agriculture." *American Journal of Agricultural Economics* 65 (November 1983): 761-769.
- [12] Diewert, W. E. "An Application of the Shephard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function." *Journal of Political Economy* 79 (May 1971): 481-507.
- [13] Diewert, W. E. "Duality Approaches to Microeconomic Theory", in Kenneth J. Arrow and Michael D. Intriligator eds., *Handbook of Mathematical Economics Vol. 2*, North-Holland, 1982, pp. 535-599.
- [14] Elbadawi, I, Gallant, A. R., and Souza, G. "An Elasticity can be Estimated Consistently without a Priori Knowledge of Functional Form." *Econometrica* 51 (November 1983): 1731-1751.
- [15] Fuss, M. Mcfadden, D., and Mundlak, Y. "A Survey of Functional Forms in the Economic Analysis of Production", in Melvyn Fuss and Daniel Mcfadden eds., *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications Volume 1*, Amsterdam: North-Holland, 1978, pp. 219-286.
- [16] Gallant, A. R. "The Fourier Flexible Form." *American Journal of Agricultural Economics* 66 (May 1984): 204-208.
- [17] Guilkey, D. K, Lovell, C. A. K., and Sickles, R. C. "A Comparison of the Performance of Three Flexible Functional Forms." *International Economic Review* 24 (October 1983): 591-616.
- [18] Guilkey, D. K., and Lovell, C. A. K. "On the Flexibility of the Translog Approximation." *International Economic Review* 21 (February 1980): 137-147.
- [19] Johnston, J. *Econometric Methods*, 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1984.
- [20] Kako, T. "Decomposition Analysis of Derived Demand for Factor Inputs: The Case of Rice Production in Japan." *American Journal of Agricultural*

Economics 60 (November 1978): 628-635.

- [21] King, G. A. "Estimating Functional Forms with Special Reference to Agriculture: Discussion." *American Journal of Agricultural Economics* 66 (May 1984): 221-222.
- [22] Kuroda, Y. "The Production Structure and Demand for Labor in Postwar Japanese Agriculture, 1952-82." *American Journal of Agricultural Economics* 69 (May 1987): 328-337.
- [23] Lau, L. J. "Application of Profit Function", in Melvyn Fuss and Daniel Mcfadden eds., *Production Economic: A Dual Approach to Theory and Applications Volume 1*, Amsterdam: North-Holland, 1978, pp. 133-216.
- [24] Lopez, R. E. "The Structure of Production and the Derived Demand for Inputs in Canadian Agriculture." *American Journal of Agricultural Economics* 62 (February 1980): 38-45.
- [25] Magnus, J. R. "Substitution between Energy and Non-Energy Inputs in the Netherlands 1950-1976." *International Economic Review* 20 (June 1979): 465-484.
- [26] Nghiep, L. T. "The Structure and Changes of Technology in Prewar Japanese Agriculture." *American Journal of Agricultural Economics* 61 (November 1979): 687-693.
- [27] Ohta, M. "A Note on the Duality between Production and Cost Functions: Rate of Returns to Scale and Rate of Technical Progress." *Economic Studies Quarterly* 25 (December 1974): 63-65.
- [28] Pope, R. D. "Estimating Functional Forms with Special Reference to Agriculture: Discussion." *American Journal of Agricultural Economics* 66 (May 1984): 223-224.
- [29] Sato, R. "The Estimation of Biased Technical Progress and the Production Function." *International Economic Review* 11 (June 1970): 179-208.
- [30] Sato, R., and Koizumi, T. "On the Elasticities of Substitution and Complementarity." *Oxford Economic Paper* 25 (March 1973): 44-56.
- [31] Uzawa, H. "Duality Principles in the Theory of Cost and Production." *International Economic Review* 5 (May 1964): 216-220.
- [32] Varian, H. R. *Microeconomic Analysis*, 2nd ed. New York. London: W. W. Norton & Company, 1978.
- [33] Weaver, R. D. "Caveats on the Application of Fourier Flexible Form: Discussion." *American Journal of Agricultural Economics* 66 (May 1984): 209-210.

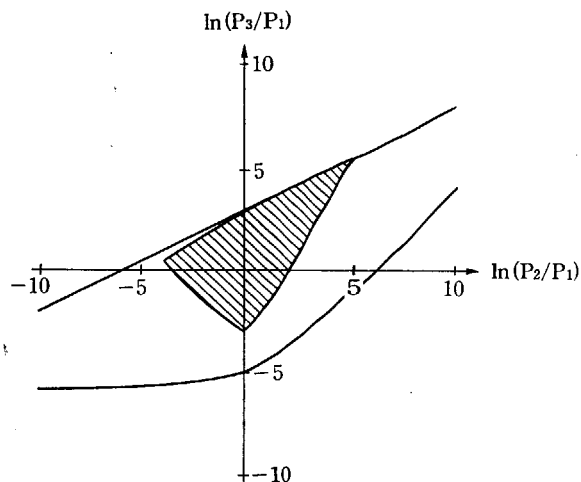
- [34] Wohlgenant, M. K. "Conceptual and Functional Form Issues in Estimating Demand Elasticities for Food." *American Journal of Agricultural Economics* 66 (May 1984): 211-215.
- [35] Woodland, A. D. "Substitution of Structures, Equipment and Labor in Canadian Production." *International Economic Review* 16 (February 1975): 171-187.
- [36] 茅野甚治郎「稲作生産構造の計量経済分析」(『宇都宮大学農学部学術報告特輯』第42号, 1984年12月)。



注. 斜線部分がコストシェア $Si(i=1,2,3) > 0$ の領域, 破線部分の内側が $\sigma_1 < 0$ の領域, 実線部分の内側が $\sigma_1 \sigma_{22} - \sigma_{12}^2 > 0$ の領域を表す。以下の各図においても領域は実線, 破線の内側である。

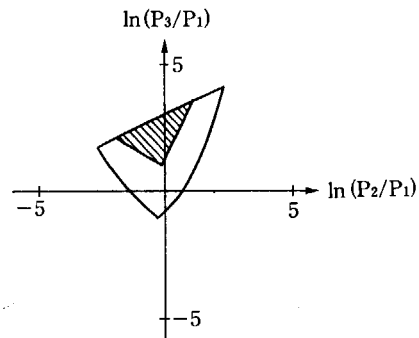
注. 初期条件 I = 実線, II = 破線, IV = 斜線部分

(3) TL 初期条件 V VI



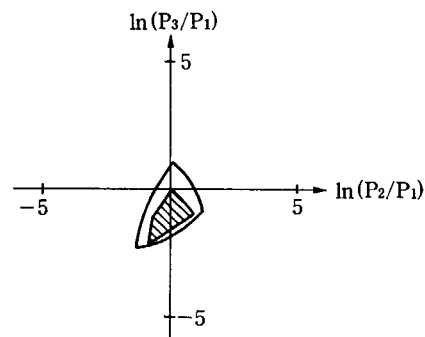
注. 初期条件 V = 実線, VI = 斜線部分

(4) TL 初期条件 VII VIII



注. 初期条件 VII = 実線, VIII = 斜線部分

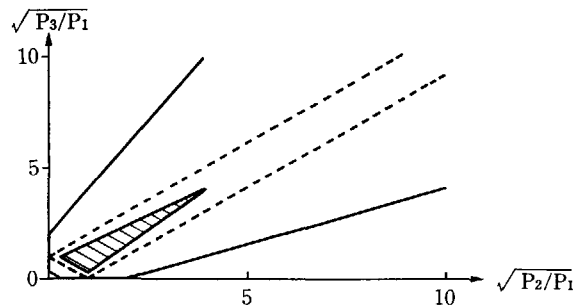
(5) TL 初期条件 IX X



注. 初期条件 IX = 実線, X = 斜線部分

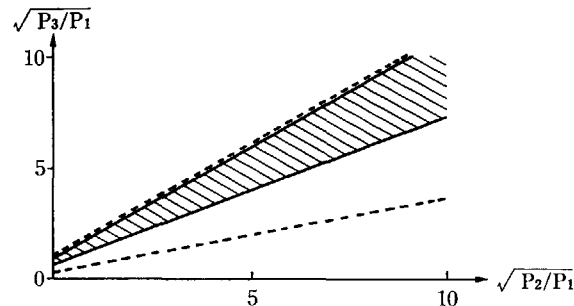
第1図 費用関数の必要十分条件を満足するデータ範囲

(1) GL 初期条件 I II III



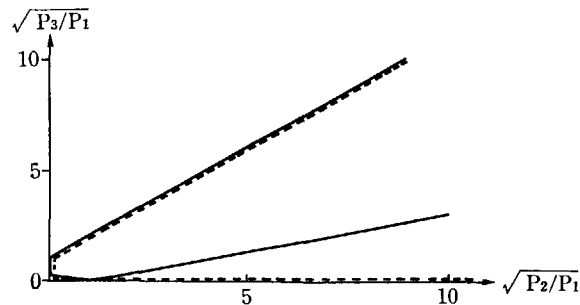
注. 初期条件 I = 斜線部分, II = 破線, III = 実線

(3) GL 初期条件 VII VIII



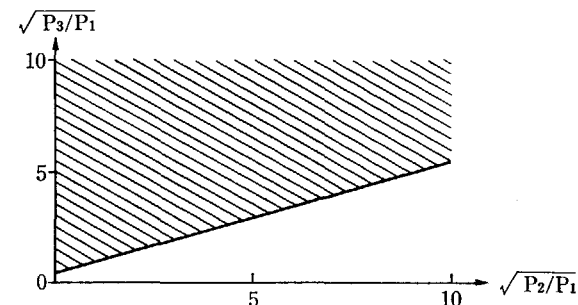
注. 初期条件 VII = 破線, VIII = 斜線部分

(2) GL 初期条件 V VI

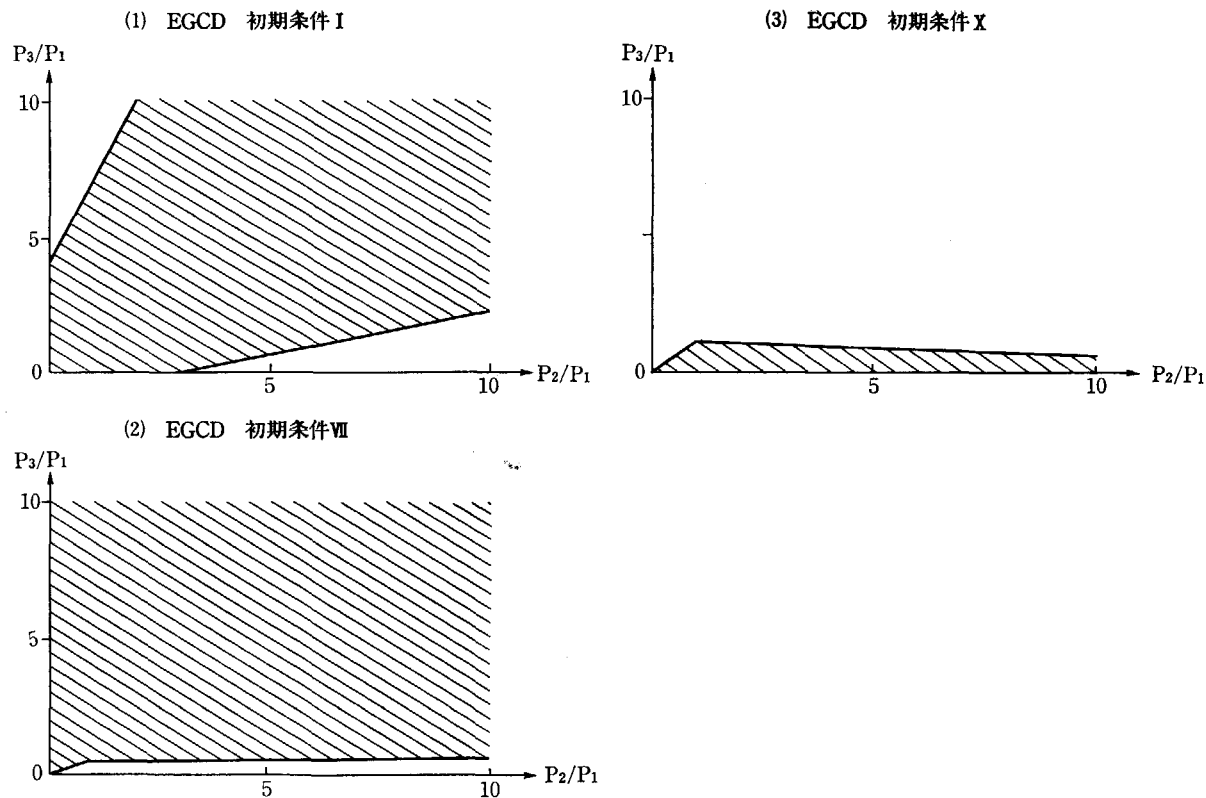


注. 初期条件 V = 実線, VI = 破線

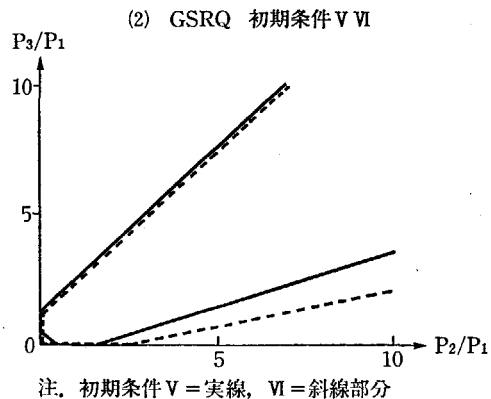
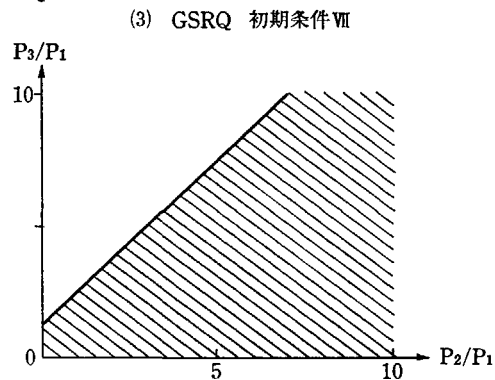
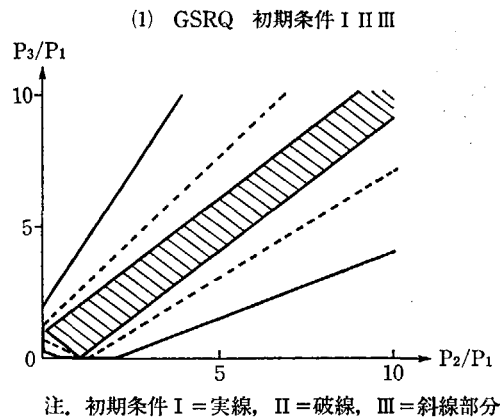
(4) GL 初期条件 X



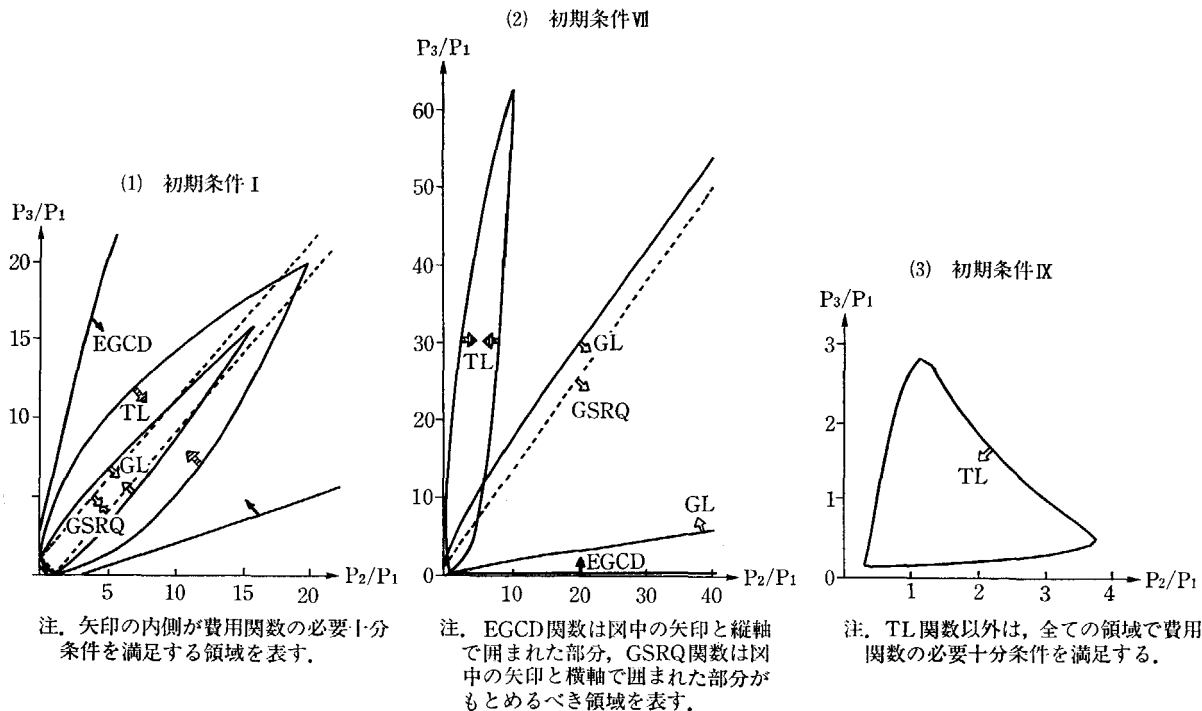
第2図 費用関数の必要十分条件を満足するデータ範囲



第3図 費用関数の必要十分条件を満足するデータ範囲



第4図 費用関数の必要十分条件を満足するデータ範囲



第5図 費用関数の必要十分条件を満足するデータ範囲

〔要 旨〕

費用関数の特定化に関する考察

伊 藤 順 一

flexible function form (FFF) は Cobb-Douglas および CES 関数に比べ、その名のとおり任意性の強い関数で、それらを生産関数、費用関数あるいは利潤関数に適用した場合、計測によって得られる技術的指標、例えば代替の弾力性、規模の経済性等に先験的な制約を課することがない。一方、推計された関数は FFF に限らず、経済理論との整合性を保つことが要請されるが、特に FFF 関数で特定化した場合、関数の形状に関して理論的整合性を損なう可能性が存在する。すなわち、関数の flexibility と well-behavior はその特定化に際し、トレードオフの関係にある。本稿はこの点に着目し、FFF で特定化した費用関数のパラメータを確定した上で、それらが well-behaved となるデータ（価格）領域を見だし、関数のスペシフィケーションに対しひとつの選択基準を与えようとするものである。

4つの FFF、すなわち translog (TL), generalized Leontief (GL), extended generalized Cobb-Douglas (EGCD), generalized square-root quadratic (GSRQ) のパラメータをいくつかの初期条件のもとで確定し、費用関数の必要十分条件を満足する価格領域を求めた。その結果、関数の性質として以下の諸点が明らかとなった。

- (1) TL 関数は代替の弾力性が1から乖離するに従い、費用関数の必要十分条件を満足する価格領域を縮小させ、負の代替の弾力性が混在すると適用可能範囲は急激に縮小する。
- (2) GL, GSRQ 関数が最適なスペシフィケーションとなるのは、代替の弾力性が極めて小さいときである。また TL 関数と異なり生産要素間に補完関係が存在しても、価格領域は比較的広い範囲を維持する。
- (3) 財の代替関係が支配的な場合、4つの FFF のうち最も広範な価格領域を形成したのは、EGCD 関数であった。しかし、補完関係が存在すると TL 関数同様、その価格領域を縮小させる。